

# **Mechanika**

## **pro mírně pokročilé**

Teoretická mechanika

*Kmitání a vlnění*

*Teorie pružnosti*

*Hydrodynamika*

Radek Kalousek

Ústav fyzikálního inženýrství

FSI VUT v Brně

27. září 2023



# Obsah

Předmluva	5
Označení důležitých veličin	7
<b>1 Teoretická mechanika</b>	<b>9</b>
1.1 Poloha, rychlost a počáteční podmínky	9
1.2 Kinetická energie a hybnost	10
1.3 Potenciální energie a síla	12
1.3.1 Externí a interní síly	12
1.3.2 Potenciální energie mechanické soustavy	16
1.4 Pohybové rovnice a trajektorie	17
1.5 Zobecněné souřadnice a zobecněné rychlosti	19
1.5.1 Omezení použití kartézských souřadnic	19
1.5.2 Částice vázaná na křivku	22
1.5.3 Částice vázaná na plochu	25
1.5.4 Dvě částice vázané k sobě	29
1.6 Eulerovy-Lagrangeovy rovnice (poprvé)	38
1.7 Metody řešení pohybových rovnic	41
1.7.1 Zobecněná hybnost a zákon zachování hybnosti	41
1.7.2 Integrál energie a zákon zachování mechanické energie	42
1.8 Řešené úlohy na Eulerovy-Lagrangeovy rovnice	46
1.8.1 Harmonický oscilátor (poprvé)	46
1.8.2 Matematické kyvadlo	49
1.8.3 Tělísko na kuželové ploše	53
1.8.4 Vozík s kyvadlem	59
1.8.5 Oscilátor s kyvadlem	64
1.8.6 Keplerova úloha	70
1.8.7 Matematické kyvadlo přivázané k rotujícímu disku	82
1.9 Princip nejmenší akce	86
1.9.1 Fermatův princip a Snellův zákon	86
1.9.2 Volná částice	89
1.9.3 Hamiltonův princip	92
1.9.4 Eulerovy-Lagrangeovy rovnice (podruhé)	95
1.10 Řešené úlohy na princip nejmenší akce	97
1.10.1 Brachistochrona	98
1.10.2 Řetězovka	101
1.11 Kanonické rovnice	106
1.11.1 Hamiltonova funkce	106
1.11.2 Nalezení kanonických rovnic	107

1.11.3	Kanonické transformace . . . . .	108
1.11.4	Harmonický oscilátor (podruhé) . . . . .	110
1.11.5	Poissonovy závorky . . . . .	114
1.11.6	Konfigurační a fázový prostor . . . . .	116
1.11.7	Harmonický oscilátor (potřetí) . . . . .	121
1.11.8	Řetěz sklouzávající přes okraj stolu . . . . .	124
1.12	Hamiltonova-Jacobiho rovnice . . . . .	131
1.12.1	Nalezení Hamiltonovy-Jacobiho rovnice . . . . .	131
1.12.2	Harmonický oscilátor (počtvrté) . . . . .	134
<b>2</b>	<b>Kmitání</b>	<b>137</b>
2.1	Potenciální energie kmitající mechanické soustavy . . . . .	137
2.2	Netlumený harmonický oscilátor . . . . .	138
2.2.1	Harmonické kmity v komplexním tvaru . . . . .	140
2.3	Tlumený harmonický oscilátor . . . . .	143
2.3.1	Silné tlumení . . . . .	144
2.3.2	Slabé tlumení . . . . .	146
2.3.3	Kritické tlumení . . . . .	149
2.4	Harmonický oscilátor tlumený třecí silou . . . . .	151
2.5	Buzený harmonický oscilátor . . . . .	157
2.5.1	Buzení konstantní silou: harmonický oscilátor v tíhovém poli . . . . .	158
2.5.2	Buzení harmonicky kmitající silou . . . . .	162
2.5.3	Buzení silou složenou ze dvou harmonických příspěvků . . . . .	171
2.5.4	Buzení silou periodického průběhu . . . . .	176
2.5.5	Buzení silou obecného průběhu . . . . .	181
2.6	Anharmonické kmity . . . . .	188
2.6.1	Lineární vratná síla . . . . .	192
2.6.2	Vratná síla s kvadratickým členem . . . . .	193
2.6.3	Vratná síla s kubickým členem . . . . .	197
2.7	Spřažené kmity . . . . .	202
2.7.1	Symetrický řetízek dvou těles . . . . .	208
2.7.2	Nesymetrický řetízek dvou těles . . . . .	214
2.7.3	Symetrický řetízek tří těles . . . . .	219
<b>3</b>	<b>Dodatky</b>	<b>227</b>
Dodatek A:	Některé vlastnosti funkcí více proměnných . . . . .	227
A.1	Nezávislé a závislé proměnné . . . . .	227
A.2	Graf funkce více proměnných a úplný diferenciál funkce . . . . .	229
A.3	Pořadí u smíšených parciálních derivací . . . . .	231
Dodatek B:	Některé vlastnosti komplexních čísel a komplexních funkcí . . . . .	235
A.4	Exponenciální funkce komplexní proměnné . . . . .	236
A.5	Vyjádření komplexního čísla pomocí exponenciální funkce . . . . .	237
A.6	Odmocnina z komplexního čísla . . . . .	238
Dodatek C:	Fourierova řada . . . . .	240
A.7	Sinová řada . . . . .	241
A.8	Kosinová řada . . . . .	245
A.9	Kosino-sinová řada . . . . .	248
A.10	Exponenciální řada . . . . .	251

# Předmluva

Krok od základního kurzu mechaniky (Obecná fyzika I) k pokročilejším kapitolám nebývá zpravidla vůbec snadným. Důvodem je především fakt, že porozumění látce probírané v navazujících předmětech (Teoretická mechanika a mechanika kontinua, Obecná fyzika III) vyžaduje zvládnutí mnohých oblastí z matematické analýzy, které ještě nejsou zcela zažity nebo jsou dokonce teprve paralelně vyučovány. Ukazuje se však, že i samotné hlubší znalosti matematických vět a důkazů nemusí poskytovat záruku snadného proniknutí do „vyšších pater“ mechaniky. I neustálé přenášení abstraktních matematických kategorií hojně používaných v diferenciálním a integrálním počtu (např. funkce, parciální derivace, diferenciál, funkcionál a mnoho dalších) do „světa“ mechanických soustav a zase zpět vyžaduje určitou zručnost, kterou je třeba postupně získávat.

Za tímto účelem bylo sepsáno velké množství knih a učebnic o pokročilé mechanice. V českém prostředí jsou to především knihy M. Brdička, A. Hladík: *Teoretická mechanika*. Academia, Praha 1987 a dále M. Brdička, L. Samek, B. Sopko: *Mechanika kontinua*. Academia, Praha 2005. Inspirativní je též publikace J. Kvasnica, A. Havránek, P. Lukáč, B. Pospíšil: *Mechanika*. Academia, Praha 2004. Zajímavé úlohy (nejen) z teoretické mechaniky jsou vloženy v knize P. Kulhánek: *Vybrané problémy z teoretické fyziky*. AGA, Praha 2016. Nemohu nezmínit též i učebnici, jejíž autor byl mým učitelem a později i kolegou: M. Macur: *Úvod do analytické mechaniky a mechaniky kontinua*. VUTIUM, Brno 2010.

Zahraniční literaturu zaměřenou na pokročilá až velmi pokročilá témata (nejen) z mechaniky především reprezentuje Teoretický kurz fyziky autorů L. D. Landaua a E. M. Lifšice. Z původní ruštiny byl přeložen do mnoha jazyků, samozřejmě angličtinu nevyjímaje. Díly, které pokrývají různé oblasti klasické mechaniky, jsou: L. D. Landau a E. M. Lifšitz: *Mechanics, Theory of Elasticity, Fluid Mechanics*. Course of Theoretical Physics. Elsevier 2010. Velmi užitečná učebnice zaměřená na kmitání a vlnění byla též přeložena i do češtiny: I. G. Main: *Kmitý a vlny ve fyzice*. Academia, Praha 1990. Jistě by šlo takto pokračovat ve výčtu ještě dlouho.

Přes tuto obsáhlou nabídku velmi kvalitní literatury postupně začala při výuce ve 2. ročníku oboru Fyzikální inženýrství a nanotechnologie vznikat potřeba připravit studijní materiál, který by svým přístupem mohl překlenout poněkud citelný schod mezi základní literaturou předmětu Obecná fyzika I, kterou je D. Halliday, R. Resnick, J. Walker: *Fyzika*. 2. vydání, VUTIUM, Brno 2013, a uvedenými pokročilými učebnicemi. Obsah tohoto studijního materiálu průběžně vzniká již po mnoho let přímo během výuky a až teprve nyní je postupně sepisován v podobě předloženého textu.

Autor byl veden snahou založit výklad na tom, proč nám dosavadní znalosti ze základního kurzu mechaniky nestačí a v čem spočívá síla nových výpočetních metod. Jednotlivé kroky jsou ještě více rozepisovány tak, aby bylo na první pohled zřejmé, k jakým úpravám daných vztahů dochází. Nechybí též širší komentáře, proč je uvedený postup výhodný a k čemu vede. Přestože se předpokládá znalost látky ze základních kurzů matematiky, především diferenciálního a integrálního počtu funkce jedné a více proměnných, mnohé důsledky více či méně

zažitých matematických vět jsou znovu vysvětlovány přímo nebo v dodatcích. Metody integrace (soustavy) diferenciálních rovnic, které nejsou v matematických kurzech ještě zcela probrány, se až na výjimky nevyužívají. Je pouze přímo uvedeno řešení s tím, že se čtenář může sám přesvědčit zpětným dosazením o jeho správnosti. V částech, kde by přílišná obecnost znesnadňovala žádanou geometrickou představu o problému, se výklad zužuje na speciální případy.

Text zatím není kompletní, jsou sepsány teprve první dvě kapitoly. Přesto se autor domnívá, že již i v této podobě by mohl být při studiu spolu s další doporučenou literaturou alespoň zčásti užitečným.

Kapitola 1 je úvodem do teoretické mechaniky. Zavádí se zde pojem zobecněná souřadnice a detailně se probírá, proč je vůbec výhodné se zobecněnými souřadnicemi pracovat. Pak se postupně prochází jednotlivé výpočetní nástroje, pomocí nichž lze řešit mnohé úlohy z oblasti pokročilé mechaniky.

Kapitola 2 je zaměřena na kmitání. Na harmonickém oscilátoru se ukazují podstatné vlastnosti tlumených lineárních kmitů včetně kmitů buzených silami nejrůznějších průběhů. Jsou též detailně probrány anharmonické kmity a kmity spřažených oscilátorů.

V dodatcích jsou přiblíženy některé z pokročilejších kapitol matematiky, např. funkce více proměnných, komplexní čísla a funkce a též i Fourierovy řady, kterým zatím během studia nemohlo být věnováno dostatek času a které jsou zároveň nezbytné pro pochopení matematických postupů při popisu chování mechanických soustav.

Další připravované kapitoly se budou týkat vlnění, teorie pružnosti a hydrodynamiky.

# Označení důležitých veličin

$x_i$	$i$ -tá kartézská souřadnice
$\dot{x}_i$	$i$ -tá kartézská složka rychlosti
$q_j$	$j$ -tá zobecněná souřadnice
$\dot{q}_j$	zobecněná rychlost spojená s $j$ -tou zobecněnou souřadnicí
$T$	kinetická energie mechanické soustavy
$V$	potenciální energie mechanické soustavy
$L$	Lagrangeova funkce (lagrangian)
$p_j$	zobecněná hybnost spojená s $j$ -tou zobecněnou souřadnicí
$h$	integrál energie
$H$	Hamiltonova funkce (hamiltonian)
$\sigma_{ij}$	složky tenzoru napětí
$\varepsilon_{ij}$	složky tenzoru deformace
$K$	objemový modul pružnosti
$\mu$	smykový modul pružnosti
$\eta$	dynamická viskozita





# Kapitola 1

## Teoretická mechanika

Budeme se zabývat *mechanickou soustavou* sestávající z  $N$  různých hmotných částic. Předpokládáme, že na tyto částice působí síly mající svůj původ jak v tělesech mimo danou mechanickou soustavu, tak i v interakci mezi částicemi navzájem. Ukážeme, jak lze popsat časový vývoj stavu mechanické soustavy, a zformulujeme obecné principy, pomocí nichž můžeme tento vývoj určit.

### 1.1 Poloha, rychlost a počáteční podmínky

*Pohybový stav* každé mechanické soustavy v daném okamžiku lze jednoznačně určit okamžitými polohami a rychlostmi každé její částice. Tyto složky budeme prozatím vyjadřovat v kartézském souřadném systému. Protože pohyb částic sledujeme obecně v trojrozměrném prostoru, poloha každé částice je popsána příslušnou trojicí jejích kartézských souřadnic  $x_{3n-2}$ ,  $x_{3n-1}$  a  $x_{3n}$ , kde index  $n$  označuje číslem danou částici a nabývá hodnot  $n = 1, 2, \dots, N$ .<sup>1</sup> Všechny kartézské souřadnice všech částic však můžeme též označovat i pomocí indexu  $i$ , který zřejmě nabývá hodnot  $i = 1, 2, \dots, 3N$ . Okamžité polohy částic v libovolném čase  $t$  jsou jednoznačně určeny funkcemi

$$x_i \equiv x_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, 3N)$$

a budeme je nazývat *kartézské souřadnice*. Dále je pohybový stav mechanické soustavy ještě určen *kartézskými složkami vektorů rychlosti*, jež jsou rovny časové derivaci příslušných kartézských souřadnic, tj.

$$\dot{x}_i \equiv \frac{dx_i}{dt} \quad (i = 1, 2, \dots, 3N).$$

#### Počáteční podmínky

Jak víme ze základního kurzu mechaniky, časový vývoj pohybového stavu mechanické soustavy se řídí pohybovými rovnicemi, jejichž tvary budeme hledat později. Ty jsou reprezentovány obecně soustavou diferenciálních rovnic, v nichž vystupují *kartézské složky zrychlení* každé částice, jež jsou definovány jako druhé derivace kartézských souřadnic podle času

$$\ddot{x}_i \equiv \frac{d^2x_i}{dt^2} \quad (i = 1, 2, \dots, 3N).$$

---

<sup>1</sup>Například, má-li mechanická soustava  $N = 2$  částic, poloha první částice označené číslem  $n = 1$  je dána jejími kartézskými souřadnicemi  $x_1$ ,  $x_2$  a  $x_3$ . Poloha druhé částice s číslem  $n = 2$  je určena kartézskými souřadnicemi  $x_4$ ,  $x_5$  a  $x_6$ .

V pohybových rovnicích dále vystupují veličiny popisující různá silová působení na každou z částic, které mohou být obecně funkcemi polohových vektorů, vektorů rychlostí částic a též i času. Znamená to tedy, že složky zrychlení představují v těchto rovnicích derivace nejvyššího řádu, a proto jsou pohybové rovnice diferenciálními rovnicemi druhého řádu. Aby mohly být určeny všechny složky zrychlení, je třeba mít obecně  $3N$  pohybových rovnic.

Někdy hledání řešení nějaké diferenciální rovnice říkáme, že ji *integrujeme*, a to i přesto, že konkrétní její tvar neumožňuje použít přímo operaci integrace. V případě diferenciální rovnice druhého řádu říkáme, že ji „integrujeme dvakrát“, přičemž každá „integrace“ vnáší do jejího řešení jednu integrační konstantu. Řešení soustavy  $3N$  pohybových rovnic tedy musí obsahovat celkem  $6N$  integračních konstant. Těmto integračním konstantám nakonec přiřadíme takové hodnoty, aby byly splněny tzv. *počáteční podmínky*.

Jak již jejich název napovídá, počáteční podmínky popisují pohybový stav mechanické soustavy „na počátku“, kterému zpravidla přiřazujeme nulovou hodnotu času. Protože je pohybový stav soustavy určen okamžitými polohami a rychlostmi všech částic, počáteční podmínky budou v případě kartézských souřadnic ve tvaru

$$x_i(0) = x_{0,i}, \quad \dot{x}_i(0) = v_{0,i} \quad (i = 1, 2, \dots, 3N), \quad (1.1)$$

kde  $x_{0,i}$  a  $v_{0,i}$  jsou hodnoty příslušných veličin charakterizující počáteční stav. Vidíme, že máme pro mechanickou soustavu obsahující  $N$  částic  $6N$  rovnic, pomocí nichž určíme hodnoty všech  $6N$  integračních konstant.

Není však obecně nutné, abychom definovali počáteční podmínky v čase  $t = 0$ . Jakmile určíme pohybový stav mechanické soustavy v kterémkoli čase  $t_0 \neq 0$ , pohybové stavy jsou ve všech ostatních okamžicích jednoznačně určeny. Přestože se již nejedná o „počátek“, stále takovým podmínkám

$$x_i(t_0) = x_{0,i}, \quad \dot{x}_i(t_0) = v_{0,i} \quad (i = 1, 2, \dots, 3N) \quad (1.2)$$

říkáme počáteční podmínky.

Existují dokonce i počáteční podmínky, jež neobsahují rychlosti částic, ale pouze jejich polohy. Abychom však stále měli k dispozici  $6N$  rovnic, musíme stanovit polohy ve dvou různých časech  $t_0$  a  $t_1 \neq t_0$ . I těmto podmínkám ve tvaru

$$x_i(t_0) = x_{0,i}, \quad x_i(t_1) = x_{1,i} \quad (i = 1, 2, \dots, 3N) \quad (1.3)$$

se říká počáteční podmínky a užijeme je, až se budeme zabývat Hamiltonovým principem.

## 1.2 Kinetická energie a hybnost

Kromě složek rychlostí  $\dot{x}_i$  můžeme pohybový stav mechanické soustavy popsat také pomocí jiných veličin, kterým se nyní budeme věnovat. Z důvodu zjednodušení pozdějších vztahů označíme hmotnosti a kartézské souřadnice každé z částic následujícím způsobem:

Částice	Hmotnost	Kartézské souřadnice
1	$m_1 = m_2 = m_3$	$(x_1, x_2, x_3)$
2	$m_4 = m_5 = m_6$	$(x_4, x_5, x_6)$
3	$m_7 = m_8 = m_9$	$(x_7, x_8, x_9)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$N$	$m_{3N-2} = m_{3N-1} = m_{3N}$	$(x_{3N-2}, x_{3N-1}, x_{3N})$

Již jsme zavedli index  $n = 1, 2, \dots, N$  označující danou částici a dále index  $i = 1, 2, \dots, 3N$  pro danou kartézskou souřadnici a složku rychlosti. Pak můžeme zapsat polohový vektor  $n$ -té částice ve tvaru

$$\mathbf{r}_n = (x_{3n-2}; x_{3n-1}; x_{3n})$$

a její vektor rychlosti takto:

$$\mathbf{v}_n = (\dot{x}_{3n-2}; \dot{x}_{3n-1}; \dot{x}_{3n}).$$

Všechny složky polohových vektorů a složky vektorů rychlosti všech částic lze však nadále vyjádřit i přímo pomocí indexu  $i$ :

$$x_i, \quad \dot{x}_i \quad (i = 1, 2, \dots, 3N).$$

Kinetické energie prvních tří částic pak budou zřejmě ve tvaru<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{2}m_1v_1^2 = \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2), \\ T_2 &= \frac{1}{2}m_4v_2^2 = \frac{1}{2}m_4(\dot{x}_4^2 + \dot{x}_5^2 + \dot{x}_6^2), \\ T_3 &= \frac{1}{2}m_7v_3^2 = \frac{1}{2}m_7(\dot{x}_7^2 + \dot{x}_8^2 + \dot{x}_9^2). \end{aligned}$$

Protože jsme ale označili hmotnost první částice třemi různými symboly  $m_1 = m_2 = m_3$ , hmotnost druhé částice  $m_4 = m_5 = m_6$  a hmotnost třetí částice  $m_7 = m_8 = m_9$ , můžeme tyto vztahy přepsat takto:

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m_3\dot{x}_3^2, \\ T_2 &= \frac{1}{2}m_4\dot{x}_4^2 + \frac{1}{2}m_5\dot{x}_5^2 + \frac{1}{2}m_6\dot{x}_6^2, \\ T_3 &= \frac{1}{2}m_7\dot{x}_7^2 + \frac{1}{2}m_8\dot{x}_8^2 + \frac{1}{2}m_9\dot{x}_9^2. \end{aligned}$$

Tak lze zapsat kinetickou energii  $n$ -té částice následujícím způsobem:

$$T_n = \frac{1}{2}m_{3n-2}\dot{x}_{3n-2}^2 + \frac{1}{2}m_{3n-1}\dot{x}_{3n-1}^2 + \frac{1}{2}m_{3n}\dot{x}_{3n}^2 = \sum_{i=3n-2}^{3n} \frac{1}{2}m_i\dot{x}_i^2.$$

*Kinetická energie mechanické soustavy* je definována jako součet kinetických energií jednotlivých částic, tzn.

$$T \equiv T(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_{3N}) = \sum_{n=1}^N T_n = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 + \dots + \frac{1}{2}m_{3N}\dot{x}_{3N}^2 = \sum_{i=1}^{3N} \frac{1}{2}m_i\dot{x}_i^2. \quad (1.4)$$

Jednoduchost tohoto zápisu byla naší motivací k tomu, abychom hmotnosti částic označili popsáním způsobem. Je zřejmé, že kinetická energie  $T$  mechanické soustavy vyjádřená v kartézských souřadnicích je obecně funkcí všech složek rychlostí částic, nikoli však jejich poloh.

Takto můžeme snadno vyjádřit i vektor *hybnosti*  $n$ -té částice:

$$\mathbf{p}_n = m_{3n-2}\mathbf{v}_n = (m_{3n-2}\dot{x}_{3n-2}; m_{3n-1}\dot{x}_{3n-1}; m_{3n}\dot{x}_{3n})$$

nebo též můžeme všechny složky hybnosti každé z částic přehledně vyjádřit pomocí indexu  $i$ :

$$p_i = m_i\dot{x}_i \quad (i = 1, 2, \dots, 3N).$$

<sup>2</sup>Kinetickou energii budeme označovat písmenem  $T$ , jak je to běžné v literatuře pojednávající o teoretické (či analytické) mechanice, namísto dosud obvyklého  $E_k$ . Aby nedošlo k nedorozumění, budou perioda a další důležité časové intervaly značeny řeckým písmenem  $\tau$ .

Tvar  $p_i$  nás dále přivádí k tomu, že lze získat kteroukoli složku hybnosti kterékoli částice tak, že parciálně zderivujeme kinetickou energii mechanické soustavy (1.4) podle příslušné složky rychlosti:

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = m_i \dot{x}_i. \quad (1.5)$$

Využíváme tak selektivní vlastnosti parciální derivace, která při sumaci vybere pouze takové členy, jež obsahují proměnnou, podle níž se derivuje, zde  $\dot{x}_i$ . Pro konkrétní  $i$  je potom v sumě (1.4) takový člen pouze jeden, a to  $\frac{1}{2}m_i \dot{x}_i^2$ . Ostatní členy již  $\dot{x}_i$  neobsahují a jejich parciální derivace podle této proměnné jsou tudíž rovny nule.

Pro časovou derivaci  $i$ -té složky hybnosti dále zřejmě platí, že

$$\dot{p}_i = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) = m_i \ddot{x}_i. \quad (1.6)$$

Nyní používáme totální derivaci, protože hledáme závislost na čase všech proměnných, na kterých  $p_i$  závisí. Je vhodné, abychom si zde uvědomili, že v zápisech všech vztahů je třeba důsledně rozlišovat mezi parciální derivací (zde podle příslušné složky rychlosti  $\dot{x}_i$ ) a totální derivací (zde podle času  $t$ ).

## 1.3 Potenciální energie a síla

Působí-li na jednotlivé částice mechanické soustavy pouze konzervativní síly, můžeme každou z nich vyjádřit pomocí potenciální energie. V tomto textu budeme zkoumat potenciální energii každé z částic pouze jako funkci její polohy.<sup>3</sup> Silové působení na  $n$ -tou částici rozdělíme podle původce síly: Působí-li tělesa mimo mechanickou soustavu, budeme tyto síly nazývat *externími* (*vnějšími*) *silami*. Silovému působení mezi částicemi navzájem budeme říkat *interní* (*vnitřní*) *síly*.

### 1.3.1 Externí a interní síly

Potenciální energie výslednice externích sil od všech vnějších těles bude funkcí polohy  $n$ -té částice  $\mathbf{r}_n$ , tzn.<sup>4</sup>

$$V_n^{\text{ext}} \equiv V_n^{\text{ext}}(\mathbf{r}_n) = V_n^{\text{ext}}(x_{3n-2}, x_{3n-1}, x_{3n}). \quad (1.7)$$

Příslušná síla je potom rovna záporně vzatému gradientu této potenciální energie vzhledem ke složkám polohového vektoru  $\mathbf{r}_n = (x_{3n-2}; x_{3n-1}; x_{3n})$ , který označíme  $\nabla_{\mathbf{r}_n}$  a definujeme jej takto:

$$\nabla_{\mathbf{r}_n} \equiv \left( \frac{\partial}{\partial x_{3n-2}}, \frac{\partial}{\partial x_{3n-1}}, \frac{\partial}{\partial x_{3n}} \right).$$

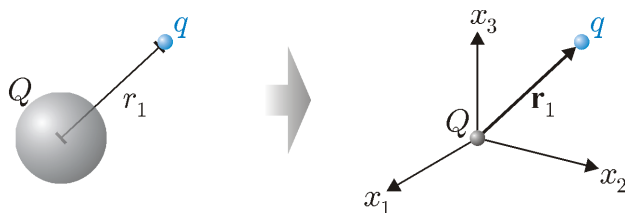
Složky této síly potom můžeme obecně vyjádřit následovně:

$$\mathbf{F}_n^{\text{ext}} = -\nabla_{\mathbf{r}_n} V_n^{\text{ext}} = \left( -\frac{\partial V_n^{\text{ext}}}{\partial x_{3n-2}}, -\frac{\partial V_n^{\text{ext}}}{\partial x_{3n-1}}, -\frac{\partial V_n^{\text{ext}}}{\partial x_{3n}} \right). \quad (1.8)$$

<sup>3</sup>Ze základního kurzu z elektřiny a magnetismu víme, že na nabitě částice působí nejen elektrická síla, ale i magnetická síla, která je úměrná rychlosti částice, viz např. D. Halliday, R. Resnick, J. Walker: *Fyzika*. 2. vydání, VUTIUM, Brno 2013, kap. 28, odst. 28-3. Ta je však vždy kolmá k vektoru rychlosti a tudíž nedochází ke změně kinetické energie této částice.

<sup>4</sup>Jak je běžné v teoretické i kvantové mechanice, potenciální energii zde budeme značit písmenem  $V$  namísto dřívějšího  $E_p$ .

**Příklad 1.1** Uvažujme o částici nabité nábojem  $q$ , která se nachází vně koule, jež je obklopena vakuem a je rovnoměrně nabitá nábojem  $Q$ , viz obr. 1.1 vlevo. Mechanická soustava nyní tedy sestává z jediné nabitě částice ( $N = 1$ ) a nabitá koule zde představuje vnější těleso působící na tuto částici.



Obrázek 1.1: Vlevo: Částice nabitá nábojem  $q$  se nachází vně koule rovnoměrně nabitě nábojem  $Q$ . Vpravo: Elektrostatické pole rovnoměrně nabitě koule nábojem  $Q$  je ekvivalentní poli částice nabitě stejným nábojem ( $Q$ ) umístěné ve středu koule.

Ze základního kurzu elektřiny a magnetismu víme, že elektrické pole vně rovnoměrně nabitě koule je ekvivalentní elektrickému poli částice nabitě stejným nábojem umístěné do středu této koule.<sup>5</sup> Zvolíme tedy počátek kartézské soustavy ve středu koule, jak je ukázáno na obr. 1.1 vpravo. Potenciální energie nabitě částice (nábojem  $q$ ), která se nachází v bodě o polohovém vektoru  $\mathbf{r}_1 = (x_1, x_2, x_3)$ , od nabitě koule (nábojem  $Q$ ) tudíž bude

$$V_1^{\text{ext}}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{|\mathbf{r}_1|} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}, \quad (1.9)$$

kde  $\epsilon_0$  je permitivita vakua.<sup>6</sup> Síla, kterou nabitá koule působí na částici, je potom podle (1.8) tato:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1^{\text{ext}} &= -\nabla_{\mathbf{r}_1} V_1^{\text{ext}} = \left( -\frac{\partial V_1^{\text{ext}}}{\partial x_1}; -\frac{\partial V_1^{\text{ext}}}{\partial x_2}; -\frac{\partial V_1^{\text{ext}}}{\partial x_3} \right) = \\ &= \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{x_1}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}}; \frac{x_2}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}}; \frac{x_3}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}} \right) = \\ &= \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}} (x_1, x_2, x_3) = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}_1|^3} \mathbf{r}_1 = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}_1|^2} \frac{\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_1|}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Protože podíl  $\mathbf{r}_1/|\mathbf{r}_1|$  představuje jednotkový vektor směřující od středu koule k nabitě částici, viz obr. 1.1 vpravo, velikost externí síly je zřejmé

$$|\mathbf{F}_1^{\text{ext}}| = \frac{|qQ|}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}_1|^2}$$

a síla směřuje od středu koule, pokud mají oba náboje stejné znaménko ( $qQ > 0$ ). Pokud mají náboje opačné znaménko ( $qQ < 0$ ), částice je ke kouli přitahována. Jde tedy zřejmě o elektrostatickou sílu vyjádřenou známým Coulombovým zákonem.<sup>7</sup>

Výpočet gradientu v (1.10) ale můžeme vést mnohem přehledněji. Nejprve napíšeme velikost polohového vektoru  $|\mathbf{r}_1|$  takto:

$$|\mathbf{r}_1| = \sqrt{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_1} = \sqrt{\mathbf{r}_1^2}. \quad (1.11)$$

<sup>5</sup>Viz např. D. Halliday, R. Resnick, J. Walker: *Fyzika*. 2. vydání, VUTIUM, Brno 2013, kap. 23, odst. 23-9.

<sup>6</sup> $\epsilon_0 \doteq 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Fm}^{-1}$

<sup>7</sup>Viz např. D. Halliday, R. Resnick, J. Walker: *Fyzika*. 2. vydání, VUTIUM, Brno 2013, kap. 21, odst. 21-4.

Potom potenciální energie (1.9) bude mít toto ekvivalentní vyjádření:

$$V_1^{\text{ext}}(\mathbf{r}_1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{\sqrt{\mathbf{r}_1^2}}.$$

Aplikujeme-li záporně vzatý gradient na potenciální energii mající tento tvar, dostáváme

$$\mathbf{F}_1^{\text{ext}} = -\nabla_{\mathbf{r}_1} V_1^{\text{ext}} = -\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \nabla_{\mathbf{r}_1} \left( \frac{1}{\sqrt{\mathbf{r}_1^2}} \right). \quad (1.12)$$

Nyní přepíšeme výsledek v (1.10) pomocí (1.11) následovně:

$$\mathbf{F}_1^{\text{ext}} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}_1|^3} \mathbf{r}_1 = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}_1}{(\sqrt{\mathbf{r}_1^2})^3}.$$

Porovnáme-li jej s (1.12), zjišťujeme, že musí platit

$$\nabla_{\mathbf{r}_1} \left( \frac{1}{\sqrt{\mathbf{r}_1^2}} \right) = -\frac{\mathbf{r}_1}{(\sqrt{\mathbf{r}_1^2})^3}. \quad (1.13)$$

Toto vyjádření nám nápadně připomíná derivování následující funkce jedné proměnné:  $f(x) = 1/|x| = 1/\sqrt{x^2}$ :

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{\sqrt{x^2}} \right) = -\frac{x}{(\sqrt{x^2})^3}.$$

Rozdíl je pouze v tom, že zde derivujeme podle (skalární) proměnné  $x$ , zatímco ve vztahu (1.13) jako kdybychom „derivovali“ podle (vektorové) proměnné  $\mathbf{r}_1$ . Protože, jak vidíme, výsledek je formálně stejný, v některé literatuře<sup>8</sup> se uvádí operátor gradientu  $\nabla$  též jako parciální derivování podle  $\mathbf{r}$ :

$$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right). \quad (1.14)$$

Ačkoli se v dalším setkáme s gradientem funkce velikosti polohového vektoru vícekrát, při-  
držíme se běžného označení pomocí operátoru nabla.

## Interní síly

Vraťme se zpět k obecnému vyjádření všech sil, které na částice mohou působit. Budeme se nyní zabývat interními silami, kterými působí částice navzájem. Předpokládáme, že i tyto síly mají povahu konzervativních sil. Pokud zanedbáváme relativistickou podstatu interakcí,<sup>9</sup> v naprosté většině případů jsou takové interakce funkcí jen vzdálenosti obou zúčastněných částic, tedy

$$V_{n,m}^{\text{int}} \equiv V_{n,m}^{\text{int}}(|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m|). \quad (1.15)$$

Příslušná (interní) síla, kterou na  $n$ -tou částici působí  $m$ -tá částice, pak bude rovna záporně vzatému gradientu potenciální energie  $V_{n,m}^{\text{int}}$ . Gradient provedeme vzhledem ke složkám polohového vektoru  $n$ -té částice  $\mathbf{r}_n = (x_{3n-2}; x_{3n-1}; x_{3n})$ , přičemž polohový vektor  $m$ -té částice  $\mathbf{r}_m$

<sup>8</sup>Např. v L. D. Landau, E. M. Lifshitz: *Mechanics*. Course of Theoretical Physics. Elsevier 2010.

<sup>9</sup>Máme tím na mysli aproximaci, ve které informace o tom, že částice změnila polohu, se již nešíří konečnou rychlostí (světla), nýbrž okamžitě.

považujeme při derivování za konstantní:

$$\mathbf{F}_{n,m}^{\text{int}} = -\nabla_{\mathbf{r}_n} V_{n,m}^{\text{ext}} = \left( -\frac{\partial V_{n,m}^{\text{ext}}}{\partial x_{3n-2}}, -\frac{\partial V_{n,m}^{\text{ext}}}{\partial x_{3n-1}}, -\frac{\partial V_{n,m}^{\text{ext}}}{\partial x_{3n}} \right).$$

Protože podle (1.15) je  $V_{n,m}^{\text{int}}$  pouze funkcí  $|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m|$ , můžeme tento zápis přehledněji vyjádřit pomocí vektorů

$$\mathbf{F}_{n,m}^{\text{int}} = -\nabla_{\mathbf{r}_n} V_{n,m}^{\text{int}} = -\frac{dV_{n,m}^{\text{int}}}{d|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m|} \nabla_{\mathbf{r}_n} |\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m|.$$

Lze se dále přesvědčit o tom, že výpočet gradientu  $\nabla_{\mathbf{r}_n} |\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m|$  bude následující<sup>10</sup>

$$\nabla_{\mathbf{r}_n} |\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m| = \nabla_{\mathbf{r}_n} \left[ \sqrt{(\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m)^2} \right] = \frac{\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m}{\sqrt{(\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m)^2}} = \frac{\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m}{|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m|}. \quad (1.16)$$

Síla  $\mathbf{F}_{n,m}^{\text{int}}$  pak vyjde

$$\mathbf{F}_{n,m}^{\text{int}} = -\frac{dV_{n,m}^{\text{int}}}{d|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m|} \frac{\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m}{|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m|}. \quad (1.17)$$

Chceme-li vyjádřit sílu  $\mathbf{F}_{m,n}^{\text{int}}$ , kterou působí naopak  $n$ -tá částice na  $m$ -tou částici, bude opět rovna záporně vzatému gradientu potenciální energie (1.15), tentokrát však vzhledem ke složkám polohového vektoru  $\mathbf{r}_m$ :

$$\mathbf{F}_{m,n}^{\text{int}} = -\nabla_{\mathbf{r}_m} V_{n,m}^{\text{int}} = -\frac{dV_{n,m}^{\text{int}}}{d|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m|} \nabla_{\mathbf{r}_m} |\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m|.$$

Gradient  $\nabla_{\mathbf{r}_m} |\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m|$  nyní zřejmě bude

$$\nabla_{\mathbf{r}_m} |\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m| = \nabla_{\mathbf{r}_m} \left[ \sqrt{(\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m)^2} \right] = -\frac{\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m}{\sqrt{(\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m)^2}} = -\frac{\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m}{|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m|}.$$

Potom hledaná síla  $\mathbf{F}_{m,n}^{\text{int}}$  bude

$$\mathbf{F}_{m,n}^{\text{int}} = \frac{dV_{n,m}^{\text{int}}}{d|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m|} \frac{\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m}{|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m|}. \quad (1.18)$$

Je tedy vidět, že pro dvojici sil  $\mathbf{F}_{n,m}$  a  $\mathbf{F}_{m,n}$  platí třetí Newtonův pohybový zákon (zákon akce a reakce)

$$\mathbf{F}_{m,n}^{\text{int}} = -\mathbf{F}_{n,m}^{\text{int}}.$$

**Příklad 1.2** Mějme dvě částice. Jedna má hmotnost  $m_1$  a polohový vektor  $\mathbf{r}_1$  a druhá hmotnost  $m_2$  a polohový vektor  $\mathbf{r}_2$ , viz obr. 1.2 vlevo. Tyto částice na sebe navzájem působí gravitačními silami podle Newtonova gravitačního zákona. Ze základního kurzu mechaniky víme,<sup>11</sup> že jejich potenciální energie má tvar

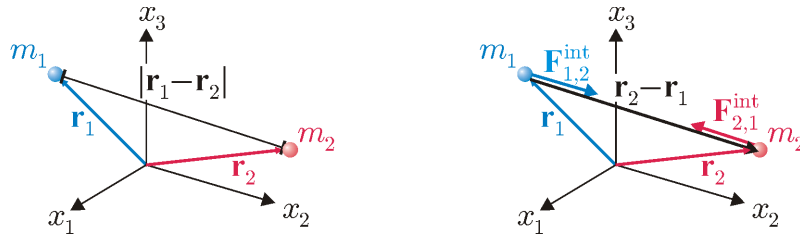
$$V_{1,2}^{\text{int}} = -G \frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}, \quad (1.19)$$

kde  $G$  je gravitační konstanta<sup>12</sup> a  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$  je vzdálenost mezi nimi.

<sup>10</sup>Opět si všimáme, že operátor  $\nabla_{\mathbf{r}_n}$  lze formálně považovat za parciální derivování podle  $\mathbf{r}_n$ , jak jsme již zjistili v předchozím příkladu. Provést výpočet (1.16) proto bude snadné.

<sup>11</sup>Viz např. D. Halliday, R. Resnick, J. Walker: *Fyzika*. vydání, VUTIUM, Brno 2013, kap. 13, odst. 13-6.

<sup>12</sup> $G \doteq 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2 \text{ kg}^{-2}$ .



Obrázek 1.2: Vlevo: Částice o hmotnosti  $m_1$  a polohovém vektoru  $\mathbf{r}_1$  a částice o hmotnosti  $m_2$  a polohovém vektoru  $\mathbf{r}_2$  jsou od sebe vzdáleny  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ . Vpravo: Gravitační síla  $\mathbf{F}_{1,2}$  (modrá šipka), kterou částice 2 působí na částici 1 má stejný směr jako vektor  $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ .

Sílu, kterou působí částice 2 na částici 1, vypočítáme podle (1.17)

$$\mathbf{F}_{1,2}^{\text{int}} = -\frac{dV_{1,2}^{\text{int}}}{d|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} = -G \frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2} \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} = G \frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1). \quad (1.20)$$

Velikost této síly tedy je

$$F_{1,2}^{\text{int}} = G \frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2}$$

a její směr udává vektor  $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$  směřující od částice 1 k částici 2, jak je ukázáno na obr. 1.2 vpravo. Jde tudíž o přitažlivou interakci. Tato síla svým vyjádřením tedy vskutku odpovídá Newtonovu gravitačnímu zákonu.

Síla, kterou naopak působí částice 1 na částici 2, bude podle (1.18)

$$\mathbf{F}_{2,1}^{\text{int}} = \frac{dV_{1,2}^{\text{int}}}{d|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} = G \frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2} \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} = G \frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = -\mathbf{F}_{1,2}^{\text{int}}.$$

Síla  $\mathbf{F}_{2,1}^{\text{int}}$  má tedy stejnou velikost, ale opačný směr jako síla  $\mathbf{F}_{1,2}^{\text{int}}$ . Je tedy ihned zřejmé, že působení částice 1 na částici 2 je opět přitažlivé a opravdu zároveň platí i třetí Newtonův pohybový zákon (akce a reakce).

### 1.3.2 Potenciální energie mechanické soustavy

Nyní zahrneme všechny interakce do jediné funkce. Protože výsledná síla působící na  $n$ -tou částici je rovna vektorovému součtu všech sil na ni působících (neboli platí princip superpozice silových interakcí), tzn.

$$\mathbf{F}_n = \mathbf{F}_n^{\text{ext}} + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^N \mathbf{F}_{n,m}^{\text{int}}$$

definujeme *potenciální energii mechanické soustavy* jako (skalární) součet potenciálních energií všech částic:

$$V \equiv V(x_1, x_2, \dots, x_{3N}) = \sum_{n=1}^N V_n^{\text{ext}}(\mathbf{r}_n) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^N V_{n,m}^{\text{int}}(|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m|). \quad (1.21)$$

Dvojitá suma musí být vynásobena 1/2, abychom interakce mezi částicemi nezapočítávali dvakrát. Lze se přesvědčit o tom, že složky výsledné síly působící na  $n$ -tou částici budou



opravdu podle očekávání

$$\mathbf{F}_n = -\nabla_{\mathbf{r}_n} V = \left( -\frac{\partial V}{\partial x_{3n-2}}; -\frac{\partial V}{\partial x_{3n-1}}; -\frac{\partial V}{\partial x_{3n}} \right) = \mathbf{F}_n^{\text{ext}} + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^N \mathbf{F}_{n,m}^{\text{int}}. \quad (1.22)$$

Z důvodu větší přehlednosti též můžeme pomocí indexu  $i$  vyjádřit každou ze složek výsledných sil působících na každou částici

$$F_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \dots, 3N). \quad (1.23)$$

Protože se všechny konzervativní síly bez ohledu na to, zda jsou externí či interní, objeví společně v podobě jednotlivých členů v potenciální energii  $V$  mechanické soustavy, nebudeme již nadále rozlišovat, které síly jsou externí a které interní.

## 1.4 Pohybové rovnice a trajektorie

V předminulém odstavci jsme prostřednictvím vztahu (1.6) vyjádřili totální derivace všech složek hybností částic  $\dot{p}_i = m_i \ddot{x}_i$ . V odstavci minulém jsme došli ke všem složkám výsledných sil působících na částice, viz (1.23). Ze základního kurzu mechaniky víme, že obě veličiny jsou si podle druhého Newtonova pohybového zákona rovny, tzn.

$$m_i \ddot{x}_i = F_i \quad (i = 1, 2, \dots, 3N), \quad (1.24)$$

což představuje  $3N$  *pohybových rovnic* vyjádřených v kartézských souřadnicích, kterým je časový vývoj pohybového stavu celé mechanické soustavy podřízen. Tvar těchto pohybových rovnic však můžeme přepsat prostřednictvím kinetické energie  $T(\dot{x}_i)$  a potenciální energie  $V(x_i)$  mechanické soustavy.

Jak jsme viděli,  $m_i \ddot{x}_i$  můžeme vyjádřit pomocí totální časové derivace parciální derivace  $T$  podle příslušné složky rychlosti  $\dot{x}_i$ , viz (1.6). Dále složku výsledné síly  $F_i$  podle vztahu (1.23) lze zapsat pomocí záporně vzaté parciální derivace  $V$  podle příslušné složky polohového vektoru  $x_i$ . Pohybové rovnice (1.24) tedy můžeme pomocí těchto veličin přepsat do následujícího tvaru:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) = -\frac{\partial V}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \dots, 3N). \quad (1.25)$$

Protože kinetická energie  $T$  je pouze funkcí kartézských složek rychlostí  $\dot{x}_i$  a potenciální energie  $V$  zase pouze funkcí kartézských souřadnic  $x_i$ , můžeme obě veličiny vyjádřit pomocí jediné funkce zvané *Lagrangeova funkce* nebo *lagrangian*:

$$L(x_i, \dot{x}_i) \equiv T(\dot{x}_i) - V(x_i). \quad (1.26)$$

Hodláme totiž využít selektivní vlastnosti parciálních derivací: Parciální derivace  $L$  podle  $\dot{x}_i$  bude znamenat, jako kdybychom provedli touž parciální derivaci kinetické energie  $T$ , neboť  $V$  není funkcí rychlostí. A dále parciální derivace  $L$  podle  $x_i$  je zase rovna téže parciální derivaci  $-V$ , protože  $T$  není funkcí kartézských souřadnic. Neboli

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}, \quad \frac{\partial L}{\partial x_i} = -\frac{\partial V}{\partial x_i}.$$

Potom se pohybové rovnice (1.25) dají zapsat pomocí Lagrangeovy funkce takto:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \dots, 3N). \quad (1.27)$$

## Trajektorie částice

Pohybové rovnice vyjádřené v kartézských souřadnicích jsme tedy našli ve dvou ekvivalentních tvarech: buď jako druhý Newtonův pohybový zákon (1.24), anebo vyjádřené pomocí Lagrangeovy funkce, viz (1.27). Jejich řešením je určení závislostí všech kartézských složek rychlostí  $\dot{x}_i$  a všech kartézských souřadnic  $x_i$  na čase  $t$ , tj. funkce

$$\dot{x}_i(t), \quad x_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, 3N).$$

Jak jsme již uvedli v odstavci 1.1 na str. 9, k jednoznačnému určení všech  $6N$  integračních konstant, které se při řešení (integraci) pohybových rovnic objeví, dále potřebujeme  $6N$  počátečních podmínek (1.1) vyjadřujících počáteční rychlosti všech částic

$$\mathbf{v}_n(0) = [\dot{x}_{3n-2}(0); \dot{x}_{3n-1}(0); \dot{x}_{3n}(0)] \quad (n = 1, 2, \dots, N)$$

a počáteční polohové vektory všech částic

$$\mathbf{r}_n(0) = [x_{3n-2}(0); x_{3n-1}(0); x_{3n}(0)] \quad (n = 1, 2, \dots, N).$$

Závislost vektoru rychlosti  $n$ -té částice na čase pak udávají složky

$$\mathbf{v}_n(t) \equiv \dot{\mathbf{r}}_n = [\dot{x}_{3n-2}(t); \dot{x}_{3n-1}(t); \dot{x}_{3n}(t)].$$

Polohový vektor  $n$ -té částice je určen složkami

$$\mathbf{r}_n(t) = [x_{3n-2}(t); x_{3n-1}(t); x_{3n}(t)],$$

jež popisují, ve kterých bodech se částice ve všech okamžicích  $t$  postupně nachází. Množina všech takových bodů, kterými daná částice projde, se nazývá *trajektorie částice* a geometricky ji můžeme znázornit jako křivku v trojrozměrném prostoru, v němž zavedeme kartézský souřadný systém sestávající ze tří navzájem kolmých os. Tyto osy označíme  $x_{3n-2}$ ,  $x_{3n-1}$  a  $x_{3n}$ . Křivka reprezentující trajektorii částice je zřejmě zadána následujícím parametrickým způsobem:

$$x_{3n-2} = x_{3n-2}(t), \quad x_{3n-1} = x_{3n-1}(t), \quad x_{3n} = x_{3n}(t), \quad (1.28)$$

přičemž čas  $t$  je parametr, jenž je společný všem třem složkám. Příklad trajektorie  $n$ -té částice je ukázán na obr. 1.3.

Infinitezimální změna  $d\mathbf{r}_n \equiv \mathbf{r}_n(t + dt) - \mathbf{r}_n(t)$  polohového vektoru  $\mathbf{r}_n$  během časového intervalu  $dt > 0$  je určena infinitesimalními změnami jednotlivých složek  $\mathbf{r}_n$ , tj.

$$\begin{aligned} d\mathbf{r}_n &\equiv \mathbf{r}_n(t + dt) - \mathbf{r}_n(t) = \\ &= [x_{3n-2}(t + dt); x_{3n-1}(t + dt); x_{3n}(t + dt)] - [x_{3n-2}(t); x_{3n-1}(t); x_{3n}(t)] = \\ &= [x_{3n-2}(t + dt) - x_{3n-2}(t); x_{3n-1}(t + dt) - x_{3n-1}(t); x_{3n}(t + dt) - x_{3n}(t)] = \\ &= (dx_{3n-2}; dx_{3n-1}; dx_{3n}), \end{aligned}$$

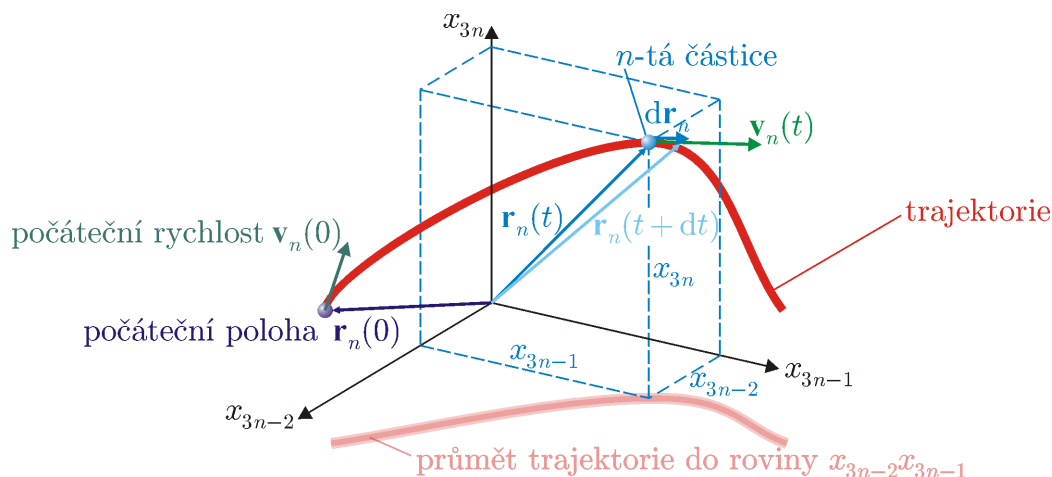
a říkáme jí *posunutí částice*. Protože částice přejde z jednoho bodu trajektorie do dalšího (infinitezimálně blízkého) bodu téže trajektorie, vektor  $d\mathbf{r}_n$  musí ukazovat v tečném směru k trajektorii. Složky tohoto posunutí získáme tak, že provedeme následující diferenciály jednotlivých funkcí (1.28):

$$dx_{3n-2} = \dot{x}_{3n-2}dt, \quad dx_{3n-1} = \dot{x}_{3n-1}dt, \quad dx_{3n} = \dot{x}_{3n}dt.$$

Posunutí částice  $d\mathbf{r}_n$  během časového intervalu  $dt$  je tedy vyjádřeno vektorem

$$d\mathbf{r}_n = (\dot{x}_{3n-2}; \dot{x}_{3n-1}; \dot{x}_{3n}) dt = \mathbf{v}_n dt \quad (1.29)$$

a znamená to, že vektor rychlosti  $\mathbf{v}_n$  je rovnoběžný a souhlasně orientovaný s vektorem posunutí  $d\mathbf{r}_n$  a je tudíž také tečný k trajektorii částice, viz obr. 1.3.



Obrázek 1.3: Geometrický význam následujících pojmů a veličin týkající se  $n$ -té částice: trajektorie částice, počáteční poloha částice  $\mathbf{r}_n(0)$ , počáteční rychlost částice  $\mathbf{v}_n(0)$ ; a dále polohový vektor  $\mathbf{r}_n(t)$ , vektor posunutí  $d\mathbf{r}_n$  a vektor rychlosti  $\mathbf{v}_n(t)$  částice v čase  $t$ .

## 1.5 Zobecněné souřadnice a zobecněné rychlosti

Když hlouběji promyslíme nové vyjádření pohybových rovnic (1.27) ve srovnání s původním druhým Newtonovým pohybovým zákonem (1.24), zjistíme, že jsme je vlastně jen formálně přepsali do jiného, byť pro oko „velmi elegantního“ tvaru. Ukážeme, že kartézské souřadnice, které jsme dosud používali, značně omezují naše možnosti určení časového vývoje konkrétních mechanických soustav. Proto budeme hledat ještě jiné vyjádření pohybových rovnic, přičemž tvar (1.27) se nám bude hodit.

### 1.5.1 Omezení použití kartézských souřadnic

Dokud jsou veškerá silová působení na částice reprezentována konzervativními silami, můžeme je vyjadřovat pomocí potenciální energie mechanické soustavy jako funkce všech kartézských souřadnic a pohybové rovnice ve tvaru (1.27) budou zcela postačovat.

Jak tomu ale bude v případech, kdy na částice budou působit síly, které budou nějakým způsobem omezovat jejich pohyb? Taková silová působení totiž nelze vyjádřit pomocí potenciálních energií. Tuto komplikaci budeme demonstrovat na následujících dvou příkladech.

**Příklad 1.3** Mechanická soustava, jejíž pohyb lze určit pomocí pohybových rovnic (1.27), může být například následující: Částice o hmotnosti  $m$  se pohybuje v tíhovém poli Země charakterizovaném vektorem tíhového zrychlení  $\mathbf{g}$ .

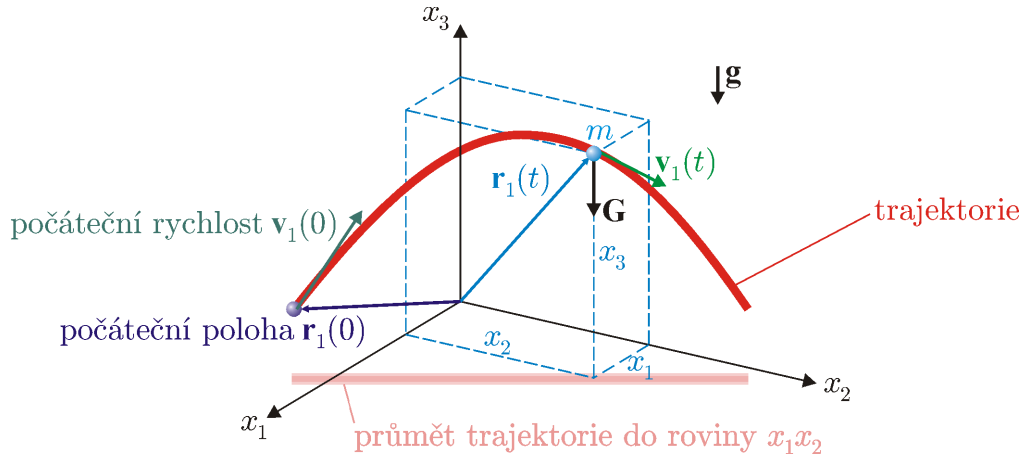
Mechanická soustava tudíž nyní sestává pouze z jedné částice, jejíž hmotnost označíme  $m_1 = m_2 = m_3 \equiv m$ , a Země představuje působící vnější těleso. Zvolíme kartézskou soustavu souřadnic takovou, že osa  $x_3$  směřuje opačně než vektor  $\mathbf{g}$ , tj.  $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$ , viz obr. 1.4.

Kinetická energie  $T$  této mechanické soustavy (částice) je podle (1.4)

$$T(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3) = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_3^2.$$

Na částici působí tíhová síla  $\mathbf{G} = m\mathbf{g}$ , která je zároveň i výslednicí všech sil. Potenciální energie  $V$  soustavy obecně vyjádřená pomocí (1.21) tedy bude dána pouze tíhovou potenciální energií částice

$$V(x_1, x_2, x_3) = mgx_3,$$



Obrázek 1.4: Pohyb částice o hmotnosti  $m$  v tíhovém poli Země charakterizovaném vektorem tíhového zrychlení  $\mathbf{g}$ . Osa  $x_3$  směřuje opačně než  $\mathbf{g}$ .

příčemž za nulovou hladinu jsme zvolili rovinu  $x_3 = 0$ . Pro kontrolu správnosti tohoto tvaru potenciální energie můžeme podle (1.22) zpětně dostat výslednici sil působících na částici:

$$-\nabla_{\mathbf{r}_1} V = \left( -\frac{\partial V}{\partial x_1}; -\frac{\partial V}{\partial x_2}; -\frac{\partial V}{\partial x_3} \right) = (0, 0, -mg) = m\mathbf{g} = \mathbf{G}.$$

Podle (1.26) bude Lagrangeova funkce této mechanické soustavy (částice) zřejmě ve tvaru

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_3^2 - mgx_3.$$

Pohybové rovnice této soustavy sestavíme za pomoci (1.27) tak, že nejdříve provedeme všechny parciální derivace  $L$ :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = m\dot{x}_1, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = m\dot{x}_2, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_3} = m\dot{x}_3; \quad \frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial x_3} = -mg.$$

Potom vyjádříme totální derivace, které se nacházejí na levé straně pohybových rovnic (1.27):

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) = m\ddot{x}_1, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right) = m\ddot{x}_2, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_3} \right) = m\ddot{x}_3.$$

Podle nich potom pohybové rovnice této mechanické soustavy nalézáme ve tvaru

$$m\ddot{x}_1 = 0, \quad m\ddot{x}_2 = 0, \quad m\ddot{x}_3 = -mg.$$

Nyní již postupujeme tak, jak jsme to činili v základním kurzu mechaniky: První integrací těchto pohybových rovnic a uplatněním počáteční podmínky  $\mathbf{v}_1(0) = (v_{0,1}, v_{0,2}, v_{0,3})$  pak dostáváme časový vývoj složek rychlosti částice:

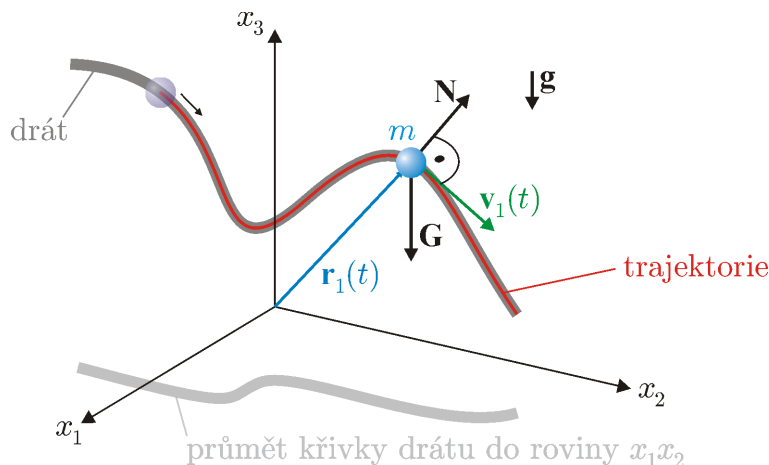
$$\dot{x}_1(t) = v_{0,1}, \quad \dot{x}_2(t) = v_{0,2}, \quad \dot{x}_3(t) = -gt + v_{0,3}.$$

Další integrací těchto složek rychlostí spolu s počáteční podmínkou  $\mathbf{r}_1(0) = (x_{0,1}, x_{0,2}, x_{0,3})$  dostáváme i časový vývoj složek polohového vektoru částice:

$$x_1(t) = v_{0,1}t + x_{0,1}, \quad x_2(t) = v_{0,2}t + x_{0,2}, \quad x_3(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0,3}t + x_{0,3}.$$

Tím úlohu považujeme za vyřešenou.

**Příklad 1.4** Mechanická soustava, jejíž pohybovou rovnici pomocí (1.27) nelze sestavit, je např. tato: Kulička o hmotnosti  $m$  je navlečena na pevný drát zadaného tvaru, po němž v tíhovém poli Země může bez tření klouzat podle obr. 1.5. Mechanická soustava je nyní opět tvořena jedinou částicí — kuličkou. Protože se kulička může pohybovat jen podél drátu, vnějšími tělesy jsou kromě Země, jež na kuličku působí tíhovou silou  $\mathbf{G}$ , i drát působící normálovou silou  $\mathbf{N}$ , viz obr. 1.5. Výslednicí sil tedy bude  $\mathbf{G} + \mathbf{N}$ .



Obrázek 1.5: Hmotná kulička klouže bez tření po drátu v tíhovém poli Země. Na kuličku tedy působí Země tíhovou silou  $\mathbf{G}$  a drát normálovou silou  $\mathbf{N}$ .

Potenciální energii tíhové síly  $\mathbf{G}$  můžeme určit např. tak, jako v předchozím příkladu. Vidíme ale, že nelze určit potenciální energii síly  $\mathbf{N}$ , neboť neexistuje funkce, jejíž záporně vzatý gradient by byl vždy roven  $\mathbf{N}$ . Překáží tomu zejména fakt, že působení této síly významně závisí na rychlosti, s kterou kulička daným bodem drátu prochází. Nesestavíme-li však celkovou potenciální energii  $V$  mechanické soustavy, potom ani pohybové rovnice užitím (1.27) nezískáme.

## Vazby

Chceme tedy hledat nový tvar pohybových rovnic mechanických soustav, kde působí i síly, které nelze vyjádřit pomocí potenciální energie. Budeme však předpokládat jen ty síly, jež omezují pohyb jednotlivých částic tak, že lze matematicky zapsat podmínky kladené na jejich polohy (popř. rychlosti). Těmto silám se říká *vazby*.

Uvažujeme tedy o tom, že na částice působí dva druhy sil: Síly, které jsou předem známými funkcemi polohových vektorů, popř. vektorů rychlostí částic, zvané *vtištěné síly*.<sup>13</sup>

Silám, kterými působí vazby při konkrétním pohybu částic a které tudíž nejsou předem známy, budeme říkat *vazbové síly*. V dalším se ještě omezíme pouze na takové vazby, které kladou podmínky pouze na polohy částic, nikoli na jejich rychlosti. Takovým vazbám říkáme *holonomní vazby*.<sup>14</sup>

V této části zatím budeme hledat jen posupy, jak eliminovat vazbové síly, aniž bychom sestavili samotné pohybové rovnice v použitelné podobě. Jejich konečný tvar takový, jenž by umožňoval určit vývoj pohybového stavu libovolné mechanické soustavy, nalezneme až v další části textu.

<sup>13</sup>V posledních dvou příkladech vtištěnou sílu reprezentovala tíhová síla  $\mathbf{G}$ , kterou působí Země.

<sup>14</sup>Holonomní vazbovou silou působí tuhý drát na navlečenou klouzající kuličku, jak uvidíme hned v dalším odstavci.

### 1.5.2 Částice vázaná na křivku

Vraťme se znovu k poslednímu příkladu kuličky klouzající bez tření po pevném drátu. Normálová síla  $\mathbf{N}$  je zde typickým příkladem vazbové síly, neboť se „stará“ o to, aby kulička za žádných okolností neopustila drát. Složky polohového vektoru kuličky se v důsledku působení síly  $\mathbf{N}$  sice všechny mění, ale jaksi „koordinovaně“ tak, aby její trajektorie byla totožná s tvarem drátu. To se musí dít bez ohledu na rychlost, s jakou se kulička bude v každém bodě drátu pohybovat. Vazbová síla  $\mathbf{N}$  tudíž nemůže být předem známa, nýbrž vyplývá až z konkrétního pohybu kuličky daného počátečními podmínkami.

Protože tato vazbová síla vymezuje polohu kuličky, nikoli její rychlost, jde typicky o holonomní vazbu. Ze zadání dále víme, že křivka drátu je v kartézských souřadnicích určena parametricky těmito třemi rovnicemi

$$x_1 \equiv x_1(q), \quad x_2 \equiv x_2(q), \quad x_3 \equiv x_3(q), \quad (1.30)$$

kde  $q$  je parametr. O funkcích (1.30) předpokládáme, že je předem známe a že jsou pro každé  $q$  spojitě i s derivacemi prvního řádu. Potom je zajištěno, že křivka drátu je všude hladká vyjma bodů, ve kterých jsou derivace všech tří funkcí zároveň nulové.

Kdybychom tedy namísto použití kartézských souřadnic  $x_i$  kuličky přešli k parametru  $q$ , kartézské souřadnice by už byly po celou dobu pohybu „správně“ svázány s křivkou drátu. Protože parametr  $q$  zde zřejmě představuje jakousi „zakřivenou souřadnici“ určující, v kterém bodě drátu se kulička právě nachází, nazývá se tento parametr *zobecněnou souřadnicí* mechanické soustavy.

Pohybové rovnice (1.24) kuličky v kartézských souřadnicích jsou tyto:

$$m\ddot{x}_1 = G_1 + N_1, \quad m\ddot{x}_2 = G_2 + N_2, \quad m\ddot{x}_3 = G_3 + N_3, \quad (1.31)$$

kde jsme obě působící síly vyjádřili pomocí jejich složek:  $\mathbf{G} = (G_1, G_2, G_3)$  a  $\mathbf{N} = (N_1, N_2, N_3)$ . Složky tíhové síly  $\mathbf{G}$  známe předem, neboť jde o vtištěnou sílu, a tato síla je navíc silou konzervativní. Podle (1.23) je tedy můžeme vyjádřit pomocí potenciální energie  $V(x_1, x_2, x_3)$ :

$$G_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, 3). \quad (1.32)$$

Vazbovou sílu  $\mathbf{N}$ , jak jsme již zmínili, zatím nemůžeme nijak blíže specifikovat, protože bude záviset na konkrétní rychlosti kuličky v každém bodě drátu a tudíž vyplyne až z řešení pohybových rovnic. Můžeme o ní říci jen to, že bude taková, aby trajektorie kuličky byla za všech okolností totožná s křivkou drátu. Bude tedy vhodné se věnovat namísto hledání složek síly  $\mathbf{N}$  spíše trajektorii samotné kuličky, což znamená, že učiníme jakousi „geometrizační“ úlohy.

Vyjádríme infinitezimální posunutí  $d\mathbf{r}_1 = (dx_1, dx_2, dx_3)$  kuličky po drátu pomocí infinitezimální změny zobecněné souřadnice  $q$ . Provedeme to tak, že napíšeme diferenciály funkcí (1.30):

$$dx_1 = \frac{dx_1}{dq}dq, \quad dx_2 = \frac{dx_2}{dq}dq, \quad dx_3 = \frac{dx_3}{dq}dq, \quad (1.33)$$

odkud

$$d\mathbf{r}_1 = (dx_1, dx_2, dx_3) = \left( \frac{dx_1}{dq}, \frac{dx_2}{dq}, \frac{dx_3}{dq} \right) dq. \quad (1.34)$$

Toto posunutí musí mít tečný směr ke křivce drátu, neboť jiným směrem se kulička nemůže pohnout.<sup>15</sup> Dále do pohybových rovnic (1.31) dosadíme z (1.32), každou vynásobíme příslušnou

<sup>15</sup>Podobné úpravy jsme prováděli, když jsme hledali infinitezimální posunutí  $d\mathbf{r}_n$ , které má  $n$ -tá částice za dobu  $dt$ , viz (1.29). Tehdy byl parametrem trajektorie částice čas  $t$ .

složkou posunutí  $dx_i$  a všechny pohybové rovnice nakonec sečteme. Potom dostáváme

$$m\ddot{x}_1 dx_1 + m\ddot{x}_2 dx_2 + m\ddot{x}_3 dx_3 = -\frac{\partial V}{\partial x_1} dx_1 + N_1 dx_1 - \frac{\partial V}{\partial x_2} dx_2 + N_2 dx_2 - \frac{\partial V}{\partial x_3} dx_3 + N_3 dx_3. \quad (1.35)$$

Nejprve si všimněme součtu tří členů obsahujících složky normálové síly  $\mathbf{N} = (N_1, N_2, N_3)$ . Ten zřejmě můžeme vyjádřit pomocí následujícího skalárního součinu:

$$\mathbf{N} \cdot d\mathbf{r}_1 = N_1 dx_1 + N_2 dx_2 + N_3 dx_3 = 0.$$

Proč je však tento skalární součin nulový? Síla  $\mathbf{N}$  je v každém bodě normálovou silou, tzn. silou kolmou ke křivce drátu, zatímco posunutí  $d\mathbf{r}_1$  má tečný směr ke křivce drátu. Oba vektory jsou tudíž vždy navzájem kolmé ve všech bodech křivky drátu. Součet těchto tří členů tedy bude za všech okolností nulový a (1.35) můžeme zredukovat na tento tvar:

$$\sum_{i=1}^3 m\ddot{x}_i dx_i = -\sum_{i=1}^3 \frac{\partial V}{\partial x_i} dx_i.$$

Do této rovnice dosadíme za  $dx_i$  z (1.33), pravou stranu převedeme nalevo a vytkneme  $dq$ , čímž dostaneme

$$\left( \sum_{i=1}^3 m\ddot{x}_i \frac{dx_i}{dq} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dq} \right) dq = 0.$$

Aby se levá strana vždy rovnala nule pro jakékoli  $dq$ , musí být závorka rovna nule a tudíž musí platit

$$\sum_{i=1}^3 m\ddot{x}_i \frac{dx_i}{dq} = -\sum_{i=1}^3 \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dq}. \quad (1.36)$$

Uvědomíme-li si, že potenciální energie  $V$  je funkcí všech tří kartézských souřadnic  $x_i$ , přičemž každá z nich je určena funkcemi (1.30), tj.

$$V \equiv V [x_1(q), x_2(q), x_3(q)], \quad (1.37)$$

můžeme (až na znaménko) považovat pravou stranu rovnice (1.36) za totální derivaci  $V$  podle  $q$ , neboli

$$\frac{dV}{dq} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dq}.$$

Přicházíme tak k závěru, že platí

$$\sum_{i=1}^3 m\ddot{x}_i \frac{dx_i}{dq} = -\frac{dV}{dq}. \quad (1.38)$$

Tento výsledek je nesmírně důležitý: Přejdem od kartézských souřadnic  $x_1$ ,  $x_2$  a  $x_3$  k zobecněné souřadnici  $q$  se nám podařilo přepsat pohybové rovnice (1.31), které obsahovaly vazbovou sílu  $\mathbf{N}$ , do jedné rovnice (1.38), ve které již tato vazbová síla vůbec nevystupuje. Jedna pohybová rovnice přitom postačuje, neboť znalost jedné zobecněné souřadnice  $q$  již určuje všechny tři kartézské souřadnice kuličky parametrickými rovnicemi (1.30).

Zůstává pouze vliv vtištěné síly určený veličinou

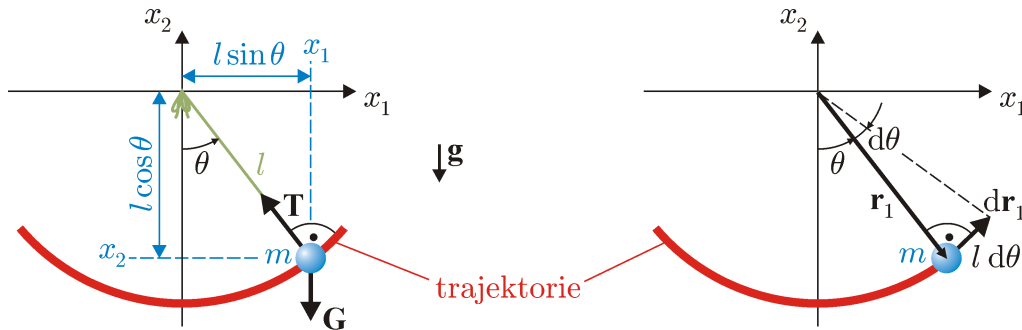
$$Q \equiv -\frac{dV}{dq}, \quad (1.39)$$

kteřá je známa předem, aniž bychom znali řešení pohybových rovnic. Avšak zobecněná souřadnice  $q$  může mít obecně libovolnou fyzikální jednotku podle toho, jakým způsobem vstupuje do funkcí (1.30). Proto veličina  $Q$  již nemusí mít nutně fyzikální jednotky newton a je nazývána *zobecněnou silou*.

Funkce  $q(t)$  potom popisuje vývoj této zobecněné souřadnice v čase a její derivace podle času určuje tzv. *zobecněnou rychlost*  $\dot{q}$ . Spolu s počátečními podmínkami  $q(0)$  a  $\dot{q}(0)$  je pak vývoj pohybového stavu této mechanické soustavy (kuličky) jednoznačně určen.

Všímáme si tedy, že v případě částice vázané na křivku jsme přešli od tří jejích kartézských souřadnic  $x_1$ ,  $x_2$  a  $x_3$  k jedné zobecněné souřadnici  $q$ , která pro určení pohybu částice zcela postačuje. Říkáme, že tento typ holonomní vazby odebírá částici 2 *stupně volnosti*.

**Příklad 1.5** Matematické kyvadlo sestává z malého závaží o hmotnosti  $m$  zavěšeného na nehmotném lanku délky  $l$  v tíhovém poli Země charakterizovaném tíhovým zrychlením  $\mathbf{g}$ . Závaží se může pohybovat pouze v jedné rovině, které vektor  $\mathbf{g}$  náleží.



Obrázek 1.6: Vlevo: Matematické kyvadlo. Vpravo: Posunutí částice  $d\mathbf{r}_1$  je tečné k její trajektorii.

Zvolíme souřadný systém takový, že osy  $x_1$  a  $x_2$  tvoří rovinu pohybu závaží, přičemž osa  $x_2$  směřuje opačným směrem než vektor  $\mathbf{g}$  podle obr. 1.6 vlevo. Na závaží působí kromě tíhové síly  $\mathbf{G}$  i tahová síla  $\mathbf{T}$  lanka tak, že závaží opisuje oblouk kružnice. Tíhová síla  $\mathbf{G} = m\mathbf{g} = (0, -mg, 0)$  je zde vtištěnou silou, neboť tuto sílu známe již před tím, než vyřešíme pohybové rovnice. Tahová síla  $\mathbf{T}$  lanka zajišťuje pohyb závaží po kružnici za všech okolností, ale zřejmě ji nemůžeme určit, dokud nevyřešíme pohybové rovnice. Tato síla je tedy vazbovou silou představující holonomní vazbu, protože určuje podmínky pro polohu částice.<sup>16</sup>

Nutnost rovinného pohybu zajistí podmínka  $x_3 = 0$ . Polohu závaží dále jednoznačně určíme pomocí úhlu  $\theta$  odklonu lanka od svislice, viz obr. 1.6 vlevo. Tento úhel tedy bude jedinou zobecněnou souřadnicí, pro níž obecné parametrické rovnice (1.30) mají tento konkrétní tvar:

$$x_1(\theta) = l \sin \theta, \quad x_2(\theta) = -l \cos \theta, \quad x_3 = 0. \quad (1.40)$$

Infinitezimální změna  $d\theta$  zobecněné souřadnice  $\theta$  způsobí následující posunutí částice, viz vztah (1.34):

$$d\mathbf{r}_1 = (dx_1, dx_2, dx_3) = \left( \frac{dx_1}{d\theta}, \frac{dx_2}{d\theta}, \frac{dx_3}{d\theta} \right) d\theta = (\cos \theta, \sin \theta, 0) l d\theta. \quad (1.41)$$

<sup>16</sup>Přesněji: Tahová síla je zde tzv. *jednostrannou holonomní vazbou*, kdy lanko může působit nenulovou silou jen tehdy, když je natahováno. Tlakovou sílu lanko naopak nepřenáší. Proto bychom měli u jednostranných vazeb vždy testovat, zda výsledné působení síly ve všech bodech odpovídá charakteru vazby. Na kuličku navlečenou na drát může působit normálová síla ve všech směrech, a proto takové testování není nutné.



Protože polohový vektor částice má podle (1.40) složky  $\mathbf{r}_1 = (x_1, x_2, x_3) = (\sin \theta, -\cos \theta, 0)l$ , vektor posunutí částice  $d\mathbf{r}_1$  je k  $\mathbf{r}_1$  kolmý a tudíž je zároveň tečný k trajektorii, viz obr. 1.6 vpravo. Tahová síla  $\mathbf{T}$  lanka je tedy vskutku kolmá k  $d\mathbf{r}_1$ .

Podle obr. 1.6 vpravo můžeme (poněkud nepřesně, ale výstižně) říci toto: Infinitesimální změna  $d\theta$  způsobí, že se částice posune po oblouku délky  $ld\theta$  „ve směru“ zobecněné souřadnice  $\theta$ .

Potenciální energie mechanické soustavy (závaží) je v kartézských souřadnicích vyjádřena funkcí

$$V = mgx_2, \quad (1.42)$$

neboť  $\mathbf{G} = -\nabla_{\mathbf{r}_1} V = (0, -mg, 0)$ . Pomocí parametrických rovnic (1.40) vyjádříme potenciální energii  $V$  jako funkci zobecněné souřadnice  $\theta$ , viz (1.37):

$$V[x_2(\theta)] = -mgl \cos \theta.$$

Zobecněná síla (1.39) potom vyjde

$$Q \equiv -\frac{dV}{d\theta} = -mgl \sin \theta.$$

Fyzikální význam této zobecněné síly je zřejmý: Jde o průmět do osy  $x_3$  momentu síly  $\mathbf{M}_g$ , kterým působí tíhová síla  $\mathbf{G}$  na závaží vzhledem k bodu závěsu:

$$\mathbf{M}_g = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{G} = (x_1, x_2, 0) \times (0, -mg, 0) = (0, 0, -mgx_1) = (0, 0, -mgl \sin \theta),$$

a její fyzikální jednotka je Nm.

Funkce  $\theta(t)$  jako časová závislost úhlu odklonu lanka od svislice pak jednoznačně určuje polohu závaží v libovolném čase. Pokud bychom ji zderivovali podle času, dostali bychom úhlovou rychlost  $\dot{\theta}(t)$ , která je zde zobecněnou rychlostí.

Pohyb matematického kyvadla však zatím nebudeme vyšetřovat, protože jsme ještě nesestavili pohybové rovnice ve tvaru, které by obsahovaly pouze zobecněné souřadnice. Výpočty dokončíme až v úloze 1.8.2 na str. 49.

### 1.5.3 Částice vázaná na plochu

Často nastávají případy, kdy poloha částice není vázána na nějakou křivku, nýbrž na plochu. Postup, jak z pohybových rovnic eliminovat normálovou sílu  $\mathbf{N} = (N_1, N_2, N_3)$ , kterou působí plocha na částici, bude sestávat z obdobných kroků, jež jsme učinili v předchozím odstavci. Nejprve napíšeme obecné parametrické rovnice libovolné plochy ve tvaru

$$x_1 \equiv x_1(q_1, q_2), \quad x_2 \equiv x_2(q_1, q_2), \quad x_3 \equiv x_3(q_1, q_2), \quad (1.43)$$

kde  $q_1$  a  $q_2$  jsou nezávislé parametry.<sup>17</sup> O funkcích (1.43) stále předpokládáme, že jsou pro každé  $q_1$  a  $q_2$  spojitě i s oběma parciálními derivacemi prvního řádu.

Opět přejdeme od kartézských souřadnic k parametrům  $q_1$  a  $q_2$ , které budou představovat dvě zobecněné souřadnice částice. Pohybové rovnice jsou zde zřejmě stejné jako pohybové rovnice (1.31), které jsme sestavili pro kuličku navlečenou na drát:

$$m\ddot{x}_1 = G_1 + N_1, \quad m\ddot{x}_2 = G_2 + N_2, \quad m\ddot{x}_3 = G_3 + N_3, \quad (1.44)$$

<sup>17</sup>Nutnost existence dvou nezávislých parametrů vyplývá z jednoduché geometrické úvahy: Částice pohybující se po ploše se může z každého bodu plochy „vydat“ dvěma nezávislými směry tečnými k ploše, které jsou navzájem kolmé, jak uvidíme dále.

kde

$$G_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.45)$$

je vtištěná konzervativní síla.

Provedeme geometrizaci úlohy tak, že vyjádříme infinitezimální posunutí  $d\mathbf{r}_1 = (dx_1, dx_2, dx_3)$  částice po ploše pomocí úplných diferenciálů funkcí (1.44):

$$dx_1 = \frac{\partial x_1}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial x_1}{\partial q_2} dq_2, \quad dx_2 = \frac{\partial x_2}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial x_2}{\partial q_2} dq_2, \quad dx_3 = \frac{\partial x_3}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial x_3}{\partial q_2} dq_2, \quad (1.46)$$

odkud

$$d\mathbf{r}_1 = (dx_1, dx_2, dx_3) = \left( \frac{\partial x_1}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial x_1}{\partial q_2} dq_2; \frac{\partial x_2}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial x_2}{\partial q_2} dq_2; \frac{\partial x_3}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial x_3}{\partial q_2} dq_2 \right).$$

Jak vidíme, toto posunutí je nyní rovno vektorovému součtu těchto dvou vektorů

$$d\mathbf{r}_1^{(1)} \equiv \left( \frac{\partial x_1}{\partial q_1}, \frac{\partial x_2}{\partial q_1}, \frac{\partial x_3}{\partial q_1} \right) dq_1 \quad \text{a} \quad d\mathbf{r}_1^{(2)} \equiv \left( \frac{\partial x_1}{\partial q_2}, \frac{\partial x_2}{\partial q_2}, \frac{\partial x_3}{\partial q_2} \right) dq_2. \quad (1.47)$$

Oba tyto vektory samozřejmě mají tečný směr k ploše, neboť jsme je získali diferencováním parametrických rovnic plochy (1.43). Protože  $q_1$  a  $q_2$  jsou nezávislé parametry, tyto vektory navíc musí být navzájem kolmé.

Dále postupujeme obdobně jako v případě částice vázané na křivku: Do pohybových rovnic (1.44) dosadíme z (1.45), každou vynásobíme příslušnou složkou posunutí  $dx_i$  a provedeme součet všech těchto pohybových rovnic:

$$m\ddot{x}_1 dx_1 + m\ddot{x}_2 dx_2 + m\ddot{x}_3 dx_3 = -\frac{\partial V}{\partial x_1} dx_1 + N_1 dx_1 - \frac{\partial V}{\partial x_2} dx_2 + N_2 dx_2 - \frac{\partial V}{\partial x_3} dx_3 + N_3 dx_3. \quad (1.48)$$

Normálová síla  $\mathbf{N}$  a posunutí  $d\mathbf{r}_1$  v tečném směru k ploše jsou nadále kolmými vektory a jejich skalární součin je tedy opět nulový:

$$\mathbf{N} \cdot d\mathbf{r}_1 = N_1 dx_1 + N_2 dx_2 + N_3 dx_3 = 0.$$

Vztah (1.48) tedy bude mít stejný tvar jako v předchozím případě:

$$\sum_{i=1}^3 m\ddot{x}_i dx_i = -\sum_{i=1}^3 \frac{\partial V}{\partial x_i} dx_i,$$

do něhož dosadíme za  $dx_i$  z (1.46):

$$\sum_{i=1}^3 m\ddot{x}_i \left( \frac{\partial x_i}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial x_i}{\partial q_2} dq_2 \right) = -\sum_{i=1}^3 \frac{\partial V}{\partial x_i} \left( \frac{\partial x_i}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial x_i}{\partial q_2} dq_2 \right).$$

Pravou stranu této rovnice převedeme nalevo a z příslušných členů vytkneme  $dq_1$  a  $dq_2$ :

$$\left( \sum_{i=1}^3 m\ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_1} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_1} \right) dq_1 + \left( \sum_{i=1}^3 m\ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_2} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_2} \right) dq_2 = 0.$$

Zobecněné souřadnice  $q_1$  a  $q_2$  jsou nezávislé. Aby se tedy levá strana poslední rovnice rovnala nule za všech okolností, musí být rovny nule obě závorky zvlášť,<sup>18</sup> tzn.

$$\sum_{i=1}^3 m\ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_1} = - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_1} = - \frac{\partial V}{\partial q_1} \equiv Q_1, \quad (1.49)$$

$$\sum_{i=1}^3 m\ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_2} = - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_2} = - \frac{\partial V}{\partial q_2} \equiv Q_2. \quad (1.50)$$

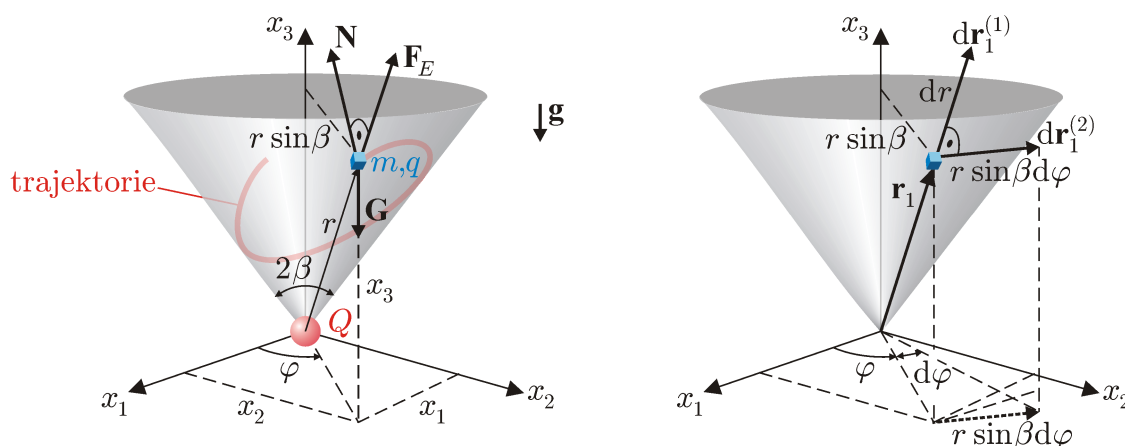
Zde definujeme dvě zobecněné síly  $Q_1$  a  $Q_2$ , neboť potenciální energie  $V$  je obecně funkcí všech tří kartézských souřadnic  $x_i$ , přičemž každá z nich je určena funkcemi (1.43), tj.

$$V \equiv V [x_1(q_1, q_2), x_2(q_1, q_2), x_3(q_1, q_2)]. \quad (1.51)$$

Rovnice (1.49) a (1.50) opět neobsahují složky vazbové síly  $\mathbf{N}$ , jak jsme požadovali. Funkce  $q_1(t)$  a  $q_2(t)$ , z nichž totální derivací podle času dostaneme zobecněné rychlosti  $\dot{q}_1$  a  $\dot{q}_2$ , popisují vývoj polohy částice v čase. Počátečními podmínkami  $q_1(0)$ ,  $q_2(0)$ ,  $\dot{q}_1(0)$  a  $\dot{q}_2(0)$  je potom pohybový stav této mechanické soustavy (částice) v každém okamžiku jednoznačně určen.

Je vhodné si všimnout, že částici vázané na plochu se nyní snížil počet nezávislých souřadnic ze tří kartézských  $x_1$ ,  $x_2$  a  $x_3$  na dvě zobecněné  $q_1$  a  $q_2$ , jež pro určení pohybu částice zcela postačují. Tento typ holonomní vazby tedy částici odebrává 1 stupeň volnosti.

**Příklad 1.6** Tělesko o hmotnosti  $m$ , jež je nabitá nábojem  $q > 0$ , může bez tření klouzat po ploše ve tvaru pláště kužele s vrchovým úhlem  $2\beta$ . Do vrcholu kužele je pevně umístěna částice nabitá nábojem  $Q > 0$ . Tělesko se pohybuje v tíhovém poli Země charakterizovaném tíhovým zrychlením  $\mathbf{g}$  rovnoběžným s osou kužele tak, že se kužel zužuje ve směru  $\mathbf{g}$ . Zvolíme kartézský souřadný systém takový, že osa  $x_3$  míří v opačném směru než vektor  $\mathbf{g}$  a počátek tohoto souřadného systému se nachází ve vrcholu kužele, viz obr. 1.7 vlevo.



Obrázek 1.7: Vlevo: Tělesko o hmotnosti  $m$  nabitá nábojem  $q$  bez tření klouže po ploše tvaru kužele o vrcholovém úhlu  $2\beta$  v tíhovém poli Země. Ve vrcholu kužele je pevně umístěna částice nabitá nábojem  $Q$ . Vpravo: Geometrický význam vektorů  $d\mathbf{r}_1^{(1)}$  a  $d\mathbf{r}_1^{(2)}$ .

<sup>18</sup>Tyto úvahy rozvíjíme v Dodatku 1, viz vztah (3.6) na str. 230.

Pokud má tělísko po ploše klouzat, jsou kladeny podmínky na jeho polohu a tato plocha tedy představuje holonomní vazbu.<sup>19</sup>

Parametrické rovnice kuželové plochy, které jsou obecně vyjádřeny funkcemi (1.43), nalezneme zavedením dvou sférických souřadnic  $r$  a  $\varphi$  (úhel  $\beta$  je pevně dán tvarem kuželové plochy) podle obr. 1.7 vlevo.:

$$x_1(r, \varphi) = r \cos \varphi \sin \beta, \quad x_2(r, \varphi) = r \sin \varphi \sin \beta, \quad x_3(r) = r \cos \beta. \quad (1.52)$$

Lze se snadno přesvědčit o tom, že z těchto rovnic plyne vztah

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_1 = r^2. \quad (1.53)$$

Protože souřadnicemi  $r$  a  $\varphi$  je poloha tělíska na ploše jednoznačně určena, tyto dvě souřadnice představují zobecněné souřadnice dané mechanické soustavy tvořené samotným tělískem. Infinitesimální změny  $dr$  a  $d\varphi$  určí možná posunutí tělíska po ploše vyjádřené obecnými vztahy (1.47). Z (1.52) tedy dostáváme:

$$d\mathbf{r}_1^{(1)} \equiv \left( \frac{\partial x_1}{\partial r}, \frac{\partial x_2}{\partial r}, \frac{\partial x_3}{\partial r} \right) dr = (\cos \varphi \sin \beta, \sin \varphi \sin \beta, \cos \beta) dr = \frac{\mathbf{r}_1}{r} dr, \quad (1.54)$$

$$d\mathbf{r}_1^{(2)} \equiv \left( \frac{\partial x_1}{\partial \varphi}, \frac{\partial x_2}{\partial \varphi}, \frac{\partial x_3}{\partial \varphi} \right) d\varphi = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0) r \sin \beta d\varphi. \quad (1.55)$$

Je zřejmé, že vektor  $d\mathbf{r}_1^{(1)}$  ukazuje ve směru polohového vektoru  $\mathbf{r}_1$ , tedy v tečném směru ke kuželové ploše, po níž se tělísko pohybuje. Vektor  $d\mathbf{r}_1^{(2)}$  má třetí složku odpovídající směru osy  $x_3$  nulovou. Zbývající dvě složky naznačují, že je tento vektor kolmý k průmětu  $\mathbf{r}_1$  do roviny  $x_1x_2$ . Oba vektory  $d\mathbf{r}_1^{(1)}$  a  $d\mathbf{r}_1^{(2)}$  možného posunutí tělíska po kuželové ploše včetně geometrie celé situace jsou znázorněny na obr. 1.7 vpravo. Vidíme zde, že i  $d\mathbf{r}_1^{(2)}$  je tečný ke kuželové ploše a zároveň je kolmý k  $d\mathbf{r}_1^{(1)}$ , jak jsme před tím vysvětlili.

Tento příklad nás vede k tomuto důležitému zjištění: Infinitesimální změna  $dr$  udává posunutí částice po ploše „ve směru“ zobecněné souřadnice  $r$ , zatímco infinitesimální změna  $d\varphi$  udává posunutí částice po ploše podél oblouku  $r \sin \beta d\varphi$  „ve směru“ zobecněné souřadnice  $\varphi$ .

Na tělísko, jehož polohu udávají kartézské souřadnice polohového vektoru  $\mathbf{r}_1 = (x_1, x_2, x_3)$ , zde působí dvě vtištěné síly: tíhová síla Země

$$\mathbf{G} = m\mathbf{g} = (0, 0, -mg)$$

a elektrická síla částice nabitá nábojem  $Q$ , kterou určíme z Coulombova zákona:

$$\mathbf{F}_E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{|\mathbf{r}_1|^2} \frac{\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_1|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}} (x_1, x_2, x_3).$$

Potenciální energie této mechanické soustavy (tělíska) tedy sestává ze dvou členů zastupujících obě síly:

$$V(x_1, x_2, x_3) = mgx_3 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}, \quad (1.56)$$

neboť výsledné silové působení těchto dvou sil vyjde

$$-\nabla_{\mathbf{r}_1} V = (0, 0, -mg) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}} (x_1, x_2, x_3) = \mathbf{G} + \mathbf{F}_E.$$

<sup>19</sup>Jde opět o jednostrannou holonomní vazbu, neboť normálová síla plochy může na tělísko působit pouze „z jedné strany“ podobně jako tahová síla lanka v předchozím příkladu.

Užitím parametrických rovnic (1.52), které představují transformační vztahy popisující přechod od tří kartézských souřadnic  $(x_1, x_2, x_3)$  ke dvěma zobecněným souřadnicím  $(r, \varphi)$ , přepíšeme potenciální energii (1.56) s přihlédnutím k (1.53) jako funkci zobecněné souřadnice  $r$  takto:

$$V(r) = mgr \cos \beta + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r}.$$

Zobecněné síly (1.49) a (1.50) potom vyjdou následovně:

$$\begin{aligned} Q_1 &\equiv -\frac{\partial V}{\partial r} = -mg \cos \beta + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2}, \\ Q_2 &\equiv -\frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0. \end{aligned}$$

Zamyslíme-li se nad těmito dvěma výsledky, zjistíme, že zobecněná síla  $Q_1$  představuje průmět výslednice sil  $\mathbf{G} + \mathbf{F}_E$  do směru zobecněné souřadnice  $r$ , zatímco zobecněná síla  $Q_2$  znamená průmět této výslednice do směru určeném zobecněnou souřadnicí  $\varphi$ . Protože obě vtištěné síly mají do tohoto směru nulový průmět, i zobecněná síla  $Q_2$  je zde nulová.

Funkce  $r(t)$ ,  $\varphi(t)$  potom určují závislost obou zobecněných souřadnic na čase a  $\dot{r}$ ,  $\dot{\varphi}$  jsou příslušné zobecněné rychlosti. Těmito veličinami je vývoj pohybového stavu mechanické soustavy (tělíška) již jednoznačně určen.

Opět se nebudeme zabývat samotným pohybem tělíška, neboť zatím nemáme k dispozici pohybové rovnice ve vhodném tvaru. Celý rozbor jeho pohybu je rozveden až v úloze 1.8.3 na str. 53.

### 1.5.4 Dvě částice vázané k sobě

V mnoha úlohách se setkáme s mechanickými soustavami, ve kterých je poloha jedné částice svázána s polohou druhé částice, například tak, že mají neustále stejnou vzdálenost.<sup>20</sup> Budeme tedy studovat soustavu sestávající ze dvou částic ( $N = 2$ ) majících složky svých polohových vektorů

$$\mathbf{r}_1 = (x_1, x_2, x_3), \quad \mathbf{r}_2 = (x_4, x_5, x_6),$$

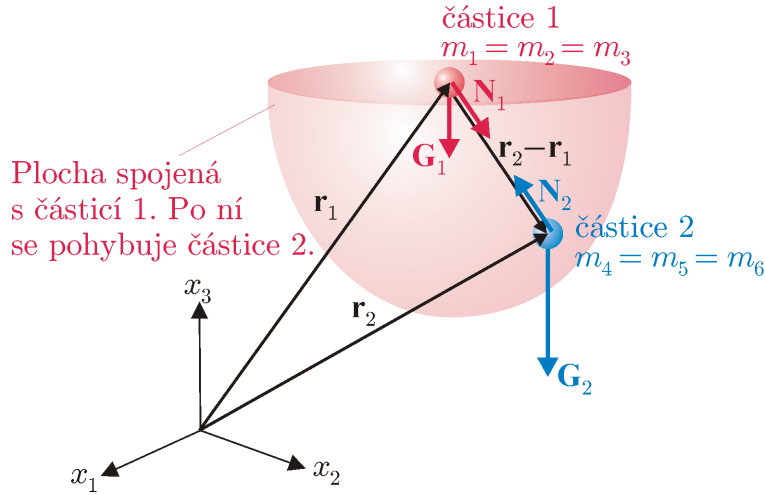
přičemž poloha částice 2 je svázána s polohou částice 1 následujícím způsobem: Částice 2 se může pohybovat pouze po dané ploše, jež se pohybuje spolu s částicí 1 podle obr. 1.8. Je-li takovou plochou např. povrch koule, jejíž střed je neustále totožný s částicí 1, pro polohu částice 2 by platila podmínka

$$|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| = \sqrt{(x_4 - x_1)^2 + (x_5 - x_2)^2 + (x_6 - x_3)^2} = l, \quad (1.57)$$

kde  $l$  je poloměr této koule. Tato konkrétní vazba zajišťuje konstantní vzdálenost mezi oběma částicemi.

Protože vazba mezi částicemi, které se hodláme věnovat, klade podmínky pro polohy částic (nikoli rychlosti), jde o vazbu holonomní. Částice 1 má hmotnost  $m_1 = m_2 = m_3$ , částice 2 má hmotnost  $m_4 = m_5 = m_6$  a obě se pohybují v poli konzervativních sil, jejichž složky jsou rovny záporně vzatým parciálním derivacím potenciální energie  $V(x_1, x_2, \dots, x_6) \equiv V(x_i)$  podle příslušné kartézské souřadnice  $x_i$ . Na každou z částic tedy působí příslušné výslednice

<sup>20</sup>Taková vazba může být realizována tím, že obě částice umístíme na opačné konce nehmotné tuhé tyče.



Obrázek 1.8: Částice 2 se pohybuje po ploše, která je pevně spojena s částicí 1 (růžová plocha). Na obě částice působí vtištěné konzervativní síly  $\mathbf{G}_1$  a  $\mathbf{G}_2$  a vazbové normálové síly  $\mathbf{N}_1$  a  $\mathbf{N}_2$ .

těchto sil  $\mathbf{G}_1 = (G_1, G_2, G_3)$  a  $\mathbf{G}_2 = (G_4, G_5, G_6)$  se složkami<sup>21</sup>

$$G_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \dots, 6), \quad (1.58)$$

jež jsou zde zjevně vtištěnými silami, neboť jejich velikosti a směry působení známe předem z tvaru funkce  $V(x_i)$ .

Dále na každou z částic působí normálové síly takové, aby se částice 2 pohybovala vůči částici 1 způsobem, který určuje holonomní vazba. Normálová síla působící na částici 1 má složky  $\mathbf{N}_1 = (N_1, N_2, N_3)$  a normálová síla působící na částici 2 má složky  $\mathbf{N}_2 = (N_4, N_5, N_6)$ , o kterých můžeme říci jen to, že pro ně platí třetí Newtonův pohybový zákon (zákon akce a reakce)

$$\mathbf{N}_1 = -\mathbf{N}_2 \Rightarrow N_1 = -N_4, \quad N_2 = -N_5, \quad N_3 = -N_6. \quad (1.59)$$

Tyto síly jsou vazbovými silami a jejich velikosti a směry bychom mohli znát až poté, co bychom vyřešili pohybové rovnice uvažované mechanické soustavy (sestavující z obou částic). Všechny působící síly jsou ukázány na obr. 1.8.

Pohybové rovnice jsou v kartézských souřadnicích pro částici 2 zřejmě ve tvaru

$$m_4 \ddot{x}_4 = G_4 + N_4, \quad m_5 \ddot{x}_5 = G_5 + N_5, \quad m_6 \ddot{x}_6 = G_6 + N_6,$$

což můžeme snadněji vyjádřit pomocí indexu  $i$ :

$$m_{i+3} \ddot{x}_{i+3} = G_{i+3} + N_{i+3} \quad (i = 1, 2, 3). \quad (1.60)$$

Pohybové rovnice pro částici 1 s ohledem na (1.59) jsou pak následující:

$$m_1 \ddot{x}_1 = G_1 + N_1 = G_1 - N_4, \quad m_2 \ddot{x}_2 = G_2 + N_2 = G_2 - N_5, \quad m_3 \ddot{x}_3 = G_3 + N_3 = G_3 - N_6,$$

neboli

$$m_i \ddot{x}_i = G_i - N_{i+3} \quad (i = 1, 2, 3). \quad (1.61)$$

<sup>21</sup>Častou vtištěnou silou bývá tíhová síla. Proto i složky výslednice vtištěných sil, pokud jich působí více, budeme obecně označovat  $G_i$ . V minulém příkladu jsme například objevili vedle tíhové síly i elektrostatickou sílu, která byla další vtištěnou konzervativní silou.

Jak jsme to učinili již dvakrát v předchozích odstavcích, geometrizaci úlohy se pokusíme tyto pohybové rovnice přepsat do takových tvarů, v nichž nebudou vystupovat neznámé složky  $N_{i+3}$  normálové síly. Toto opět provedeme přechodem od kartézských souřadnic k zobecněným souřadnicím.

Vidíme, že polohy obou částic budou jednoznačně určeny pomocí tří kartézských souřadnic částice 1 a dvou kartézských souřadnic částice 2, neboť třetí její kartézská souřadnice již plyne z předchozích a z vazbové podmínky, jejíž příklad jsme uvedli vztahem (1.57). Jak jsme popsali v předešlém odstavci, je-li částice vázána na plochu definovanou obecně parametrickými rovnicemi s dvěma parametry, pro eliminaci vazbových sil bude potřeba přejít k popisu polohy dané částice pomocí těchto parametrů, viz vztah (1.43) a dále. Polohy obou částic tedy budeme určovat pěti zobecněnými souřadnicemi  $q_j$ , kde  $j = 1, 2, \dots, 5$ . První tři zobecněné souřadnice jsou identicky rovny příslušným kartézským souřadnicím částice 1

$$x_1(q_1) \equiv q_1, \quad x_2(q_2) \equiv q_2, \quad x_3(q_3) \equiv q_3,$$

což můžeme pomocí indexu  $i$  zkráceně zapsat takto:

$$x_i(q_i) \equiv q_i \quad (i = 1, 2, 3). \quad (1.62)$$

Zbývající dvě zobecněné souřadnice  $q_4$  a  $q_5$  určují polohu částice 2. Ta se má pohybovat vůči částici 1 po dané ploše, jež se neustále s částicí 1 posouvá. Transformační vztahy pro kartézské souřadnice částice 2 tedy napíšeme ve tvaru

$$x_4(q_1, q_4, q_5) \equiv q_1 + x'_4(q_4, q_5), \quad x_5(q_2, q_4, q_5) \equiv q_2 + x'_5(q_4, q_5), \quad x_6(q_3, q_4, q_5) \equiv q_3 + x'_6(q_4, q_5),$$

neboli

$$x_{i+3}(q_i, q_4, q_5) \equiv q_i + x'_{i+3}(q_4, q_5) \quad (i = 1, 2, 3). \quad (1.63)$$

Rovnice

$$x'_4 \equiv x'_4(q_4, q_5), \quad x'_5 \equiv x'_5(q_4, q_5), \quad x'_6 \equiv x'_6(q_4, q_5) \quad (1.64)$$

představují parametrické rovnice určující danou plochu, po níž se částice 2 pohybuje. Stavba rovnic (1.63) napovídá, že se tato plocha opravdu neustále posouvá s částicí 1, neboť funkce  $x'_4$ ,  $x'_5$  a  $x'_6$  jsou zřejmě kartézské souřadnice vektoru vzájemné polohy částice 2 vůči částici 1, viz obr. 1.8:

$$\mathbf{r}' = (x'_4, x'_5, x'_6) \equiv \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = (x_4 - x_1, x_5 - x_2, x_6 - x_3). \quad (1.65)$$

Dále určíme infinitezimální posunutí obou částic tak, že vypočítáme diferenciály transformačních rovnic (1.62) a (1.63). Složky posunutí částice 1 můžeme formálně zapsat takto:

$$dx_i = \frac{dx_i}{dq_i} dq_i = dq_i \quad (i = 1, 2, 3). \quad (1.66)$$

Složky posunutí částice 2 jsou následující:

$$dx_{i+3} = \frac{\partial x_{i+3}}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial x_{i+3}}{\partial q_4} dq_4 + \frac{\partial x_{i+3}}{\partial q_5} dq_5 = dq_i + \frac{\partial x'_{i+3}}{\partial q_4} dq_4 + \frac{\partial x'_{i+3}}{\partial q_5} dq_5, \quad (i = 1, 2, 3). \quad (1.67)$$

Pro úspornější zápis využijeme této vlastnosti parciální derivace: Pokud daná kartézská souřadnice  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 6$ ), není funkcí některé ze zobecněných souřadnic  $q_j$  ( $j = 1, 2, \dots, 5$ ), je příslušná parciální derivace nulová. Můžeme tedy všechny složky posunutí  $dx_i$  obou částic určené vztahy (1.66) a (1.67) zkráceně vyjádřit pomocí indexů  $i$  a  $j$  takto:

$$dx_i = \sum_{j=1}^5 \frac{\partial x_i}{\partial q_j} dq_j \quad (i = 1, 2, \dots, 6). \quad (1.68)$$

Vektor infinitezimálního posunutí částice 1

$$d\mathbf{r}_1 = (dq_1, dq_2, dq_3) \quad (1.69)$$

je triviální, avšak vektor infinitezimálního posunutí částice 2 stojí za povšimnutí. Lze jej totiž zřejmě rozložit na tři vektory:

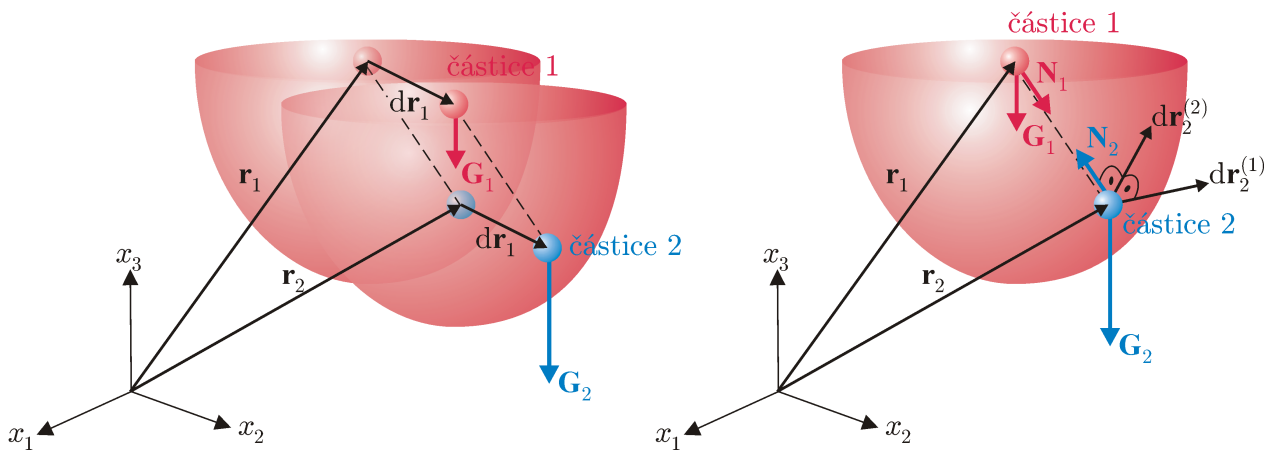
$$d\mathbf{r}_2 = (dq_1, dq_2, dq_3) + \left( \frac{\partial x'_4}{\partial q_4}, \frac{\partial x'_5}{\partial q_4}, \frac{\partial x'_6}{\partial q_4} \right) dq_4 + \left( \frac{\partial x'_4}{\partial q_5}, \frac{\partial x'_5}{\partial q_5}, \frac{\partial x'_6}{\partial q_5} \right) dq_5. \quad (1.70)$$

První vektor v (1.70) je přímo infinitezimální posunutí  $d\mathbf{r}_1$  částice 1 a znamená to tedy takové posunutí částice 2, při kterém se nezměnila vzájemná poloha obou částic. Jinými slovy řečeno: Při tomto posunutí se obě částice přemístí jako jeden celek, aniž by nastala změna jejich vzdálenosti či otočení. Toto posunutí je ukázáno na obr. 1.9 vlevo.

Druhé dva vektory

$$d\mathbf{r}_2^{(1)} \equiv \left( \frac{\partial x'_4}{\partial q_4}, \frac{\partial x'_5}{\partial q_4}, \frac{\partial x'_6}{\partial q_4} \right) dq_4, \quad d\mathbf{r}_2^{(2)} \equiv \left( \frac{\partial x'_4}{\partial q_5}, \frac{\partial x'_5}{\partial q_5}, \frac{\partial x'_6}{\partial q_5} \right) dq_5 \quad (1.71)$$

pro změnu popisují posunutí částice 2 vůči nehybné částici 1, neboť při použití parciálních derivací se považují proměnné, podle nichž se nederivuje, za konstantní. Vektory  $d\mathbf{r}_2^{(1)}$  a  $d\mathbf{r}_2^{(2)}$  tedy představují posunutí částice 2 v tečném směru po (v daném okamžiku) nehybné ploše spojené s částicí 1 a tato posunutí tedy musejí být kolmá k normálové síle  $\mathbf{N}_2$ , viz obr. 1.9 vpravo.



Obrázek 1.9: Vlevo: Infinitezimální posunutí  $d\mathbf{r}_1$  obou částic včetně plochy, která je svázána s částicí 1. Při tomto posunutí nedošlo ke změně vzájemné polohy obou částic. Vpravo: Infinitezimální posunutí  $d\mathbf{r}_2^{(1)}$  a  $d\mathbf{r}_2^{(2)}$  částice 2, přičemž částice 1 je nyní nehybná. Vektory  $d\mathbf{r}_2^{(1)}$ ,  $d\mathbf{r}_2^{(2)}$  a  $\mathbf{N}_2$  jsou všechny tři navzájem kolmé.

Platí tedy

$$\mathbf{N}_2 \cdot d\mathbf{r}_2^{(1)} = N_4 \frac{\partial x'_4}{\partial q_4} dq_4 + N_5 \frac{\partial x'_5}{\partial q_4} dq_4 + N_6 \frac{\partial x'_6}{\partial q_4} dq_4 = \sum_{i=1}^3 N_{i+3} \frac{\partial x'_{i+3}}{\partial q_4} dq_4 = 0, \quad (1.72)$$

$$\mathbf{N}_2 \cdot d\mathbf{r}_2^{(2)} = N_4 \frac{\partial x'_4}{\partial q_5} dq_5 + N_5 \frac{\partial x'_5}{\partial q_5} dq_5 + N_6 \frac{\partial x'_6}{\partial q_5} dq_5 = \sum_{i=1}^3 N_{i+3} \frac{\partial x'_{i+3}}{\partial q_5} dq_5 = 0. \quad (1.73)$$



Protože jsou zobecněné souřadnice  $q_4$  a  $q_5$  nezávislé, jsou navíc i oba vektory  $dr_2^{(1)}$  a  $dr_2^{(2)}$  na sebe kolmé, jak jsme již zjistili v předchozím odstavci.

Nyní opět každou z pohybových rovnic (1.60) a (1.61) vynásobíme odpovídající složkou infinitezimálního posunutí a všechny rovnice sečteme:

$$\sum_{i=1}^6 m_i \ddot{x}_i dx_i = \sum_{i=1}^6 G_i dx_i + \sum_{i=1}^3 (-N_{i+3} dx_i + N_{i+3} dx_{i+3}). \quad (1.74)$$

Poslední suma na pravé straně rovnice, do níž z (1.66) a (1.67) dosadíme za  $dx_i$ ,

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^3 (-N_{i+3} dx_i + N_{i+3} dx_{i+3}) = - \sum_{i=1}^3 N_{i+3} dx_i + \sum_{i=1}^3 N_{i+3} dx_{i+3} = \\ & = - \sum_{i=1}^3 N_{i+3} dq_i + \sum_{i=1}^3 \left( N_{i+3} dq_i + N_{i+3} \frac{\partial x'_{i+3}}{\partial q_4} dq_4 + N_{i+3} \frac{\partial x'_{i+3}}{\partial q_5} dq_5 \right) = \\ & = - \sum_{i=1}^3 N_{i+3} dq_i + \sum_{i=1}^3 N_{i+3} dq_i + \sum_{i=1}^3 N_{i+3} \frac{\partial x'_{i+3}}{\partial q_4} dq_4 + \sum_{i=1}^3 N_{i+3} \frac{\partial x'_{i+3}}{\partial q_5} dq_5 = 0, \end{aligned}$$

vyjde nulová, protože se první dvě sumy odečtou a podle (1.72) a (1.73) jsou druhé dvě rovny nule.

Zamysleme se nad tím, proč k tomu došlo. Eliminace složek  $N_{i+3}$  normálových sil totiž nyní probíhá ve dvou krocích: První dvě sumy

$$- \sum_{i=1}^3 N_{i+3} dq_i + \sum_{i=1}^3 N_{i+3} dq_i = 0$$

se týkají společného posunutí  $dr_1$  obou částic. Jde tedy o translační pohyb mechanické soustavy jako tuhého tělesa, ve které jsou síly  $\mathbf{N}_2$  a  $\mathbf{N}_1$  ( $= -\mathbf{N}_2$ ) vnitřními silami a tudíž se vyruší. Translační pohyb je potom dán pouze vnějšími (vtištěnými) silami. Proto jsou v obr. 1.9 vlevo zakresleny pouze síly  $\mathbf{G}_1$  a  $\mathbf{G}_2$ .

Zbývající dvě sumy

$$\sum_{i=1}^3 N_{i+3} \frac{\partial x'_{i+3}}{\partial q_4} dq_4 = 0, \quad \sum_{i=1}^3 N_{i+3} \frac{\partial x'_{i+3}}{\partial q_5} dq_5 = 0$$

vznikly z pohybu samotné částice 2 po (nehybné) ploše svázané s částicí 1. Zde sice působí všechny síly, jak ukazuje obr. 1.9 vpravo, avšak tento pohyb je kolmý k  $\mathbf{N}_2$  (i  $\mathbf{N}_1$ ). Proto jsou oba skalární součiny, jež jsou rovny těmto sumám, také nulové.

Potom, použijeme-li zápisu všech složek posunutí  $dx_i$  pomocí indexů  $i$  a  $j$ , viz (1.68), vztah (1.74) se zredukuje na tvar

$$\sum_{j=1}^5 \sum_{i=1}^6 m_i \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} dq_j = \sum_{j=1}^5 \sum_{i=1}^6 G_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} dq_j.$$

Pravou stranu rovnice převedeme nalevo, za  $G_i$  dosadíme z (1.58) a dostáváme

$$\sum_{j=1}^5 \left( \sum_{i=1}^6 m_i \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + \sum_{i=1}^6 \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) dq_j = 0. \quad (1.75)$$

Potenciální energie byla původně funkcí kartézských souřadnic  $x_i$ . Avšak při přechodu k zobecněným souřadnicím  $q_j$  je obecně každá kartézská souřadnice  $x_i$  funkcí (některých)  $q_j$ , tj.

$$V(x_i) = V[x_1(q_1); x_2(q_2); x_3(q_3); x_4(q_1, q_4, q_5); x_5(q_2, q_4, q_5); x_6(q_3, q_4, q_5)] \equiv V[x_i(q_j)].$$

Druhá suma v závorce v rovnici (1.75) tedy zřejmě představuje parciální derivaci potenciální energie  $V$  podle příslušné zobecněné souřadnice  $q_j$ . Protože jsou dále všechny zobecněné souřadnice  $q_j$  nezávislé, musí být v (1.75) rovny nule všechny závorky, aby rovnice při jakékoli volbě jednotlivých  $dq_j$  vždy platila. Výsledkem tedy je pět pohybových rovnic ve tvaru

$$\sum_{i=1}^6 m_i \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = - \sum_{i=1}^6 \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = - \frac{\partial V}{\partial q_j} \equiv Q_j \quad (j = 1, 2, \dots, 5). \quad (1.76)$$

Opět se nám podařilo vyloučit složky normálových sil  $\mathbf{N}_1$  a  $\mathbf{N}_2$  dokonce i v tomto případě, kdy je plocha, po které se pohybuje částice 2, pevně svázána s částicí 1, a tudíž se tato plocha obecně pohybuje se zrychlením. Zůstávají pouze vtištěné konzervativní síly vyjádřené pěti složkami zobecněných sil  $Q_j$ . Protože z původních šesti kartézských souřadnic  $x_i$  jsme přešli k pěti zobecněným souřadnicím  $q_j$ , tato vazba odebrává jeden stupeň volnosti.

Pokud by nebyla částice 2 vázána vzhledem k částici 1 na plochu, ale na nějakou křivku, postupovali bychom stejně, jen by byly pouze čtyři zobecněné souřadnice: první tři by byly opět identicky rovny kartézským souřadnicím částice 1 a čtvrtá by představovala parametr, který by vystupoval v parametrické rovnici dané křivky. V tomto případě by tedy počet stupňů volnosti klesl o dva.

Je možné ukázat, že pokud existuje více holonomních vazeb, lze uvedené postupy kombinovat a v takovém případě se jednotlivé poklesy stupňů volnosti sčítají. Například: Je-li částice 2 vázána na křivku spojenou s částicí 1, která je dále vázána ještě na nějakou jinou křivku, potom počet stupňů volnosti mechanické soustavy těchto dvou částic klesne z původních šesti celkem o čtyři: dva stupně volnosti odebere vazba mezi částicemi a o další dva se sníží v důsledku vazby částice 1 na křivku. Tato situace je ukázána v následujícím příkladu.

**Příklad 1.7** Závaží o hmotnosti  $m$  je nehmotným lankem délky  $l$  spojeno s tělesem o hmotnosti  $M$ , jež se může pohybovat po přímce. Těleso  $M$  je dále připojeno k jednomu konci nehmotné pružiny o tuhosti  $k$ , jejíž druhý konec je pevný. Na tuto mechanickou soustavu působí tíhová síla, jež je charakterizována tíhovým zrychlením  $\mathbf{g}$ . Pružina je orientována rovnoběžně s přímkou, po které se těleso  $M$  pohybuje, zatímco  $\mathbf{g}$  je k této přímce kolmé. Závaží  $m$  se může pohybovat jen v rovině určené přímkou a vektorem  $\mathbf{g}$ .

Osy kartézského souřadného systému zorientujeme tak, že pohyb obou těles bude probíhat v rovině  $x_1x_2$ , přičemž osa  $x_2$  je rovnoběžná, opačně orientovaná k vektoru  $\mathbf{g}$ , tzn.

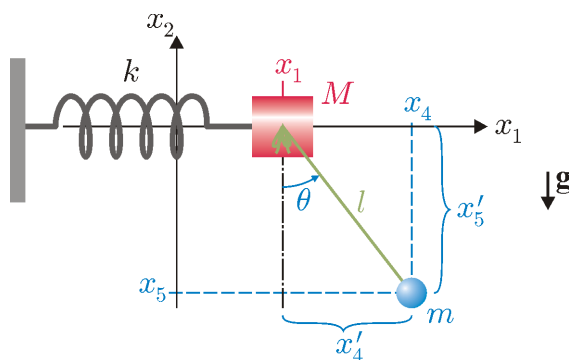
$$\mathbf{g} = (0, -g, 0).$$

Osa  $x_1$  je rovnoběžná s přímkou, na kterou je vázáno těleso  $M$ . Počátek soustavy umístíme do polohy tohoto tělesa, ve kterém není pružina zdeformována. Geometrie úlohy včetně volby souřadného systému je ukázána na obr. 1.10.

Vzhledem k tomu, že těleso  $M$  je vázáno na pevnou přímku rovnoběžnou s osou  $x_1$ , tzn. na křivku danou rovnicemi

$$x_2 = 0, \quad x_3 = 0, \quad (1.77)$$

první zobecněnou souřadnicí zde bude přímo kartézská souřadnice  $x_1$ , neboť zároveň představuje i parametr této křivky.



Obrázek 1.10: Těleso o hmotnosti  $M$  je připevněno k vodorovné pružině o tuhosti  $k$ . Na toto těleso je nehmotným lankem délky  $l$  přivázáno závaží o hmotnosti  $m$ . Na tuto mechanickou soustavu působí tíhová síla charakterizovaná tíhovým zrychlením  $\mathbf{g}$ .

Závaží  $m$  se v důsledku vazby reprezentované lankem může pohybovat vůči tělesu  $M$  po křivce ve tvaru oblouku kružnice o poloměru  $l$ , jejíž střed se nachází v poloze tělesa  $M$  a neustále se spolu s ním přesouvá. Nejdříve se proto zaměříme na vektor vzájemné polohy obou těles, který jsme obecně vyjádřili vztahem (1.65)

$$\mathbf{r}' = (x'_4, x'_5, x'_6) \equiv \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = (x_4 - x_1, x_5 - x_2, x_6 - x_3).$$

Parametrické rovnice pro kružnici obsahují jeden parametr reprezentovaný úhlem  $\theta$  odklonu lanka např. od svislice, viz obr. 1.10. Složky vektoru vzájemné polohy (1.64) napíšeme pomocí těchto parametrických rovnic, jež jsou ve tvaru:

$$x'_4(\theta) = l \sin \theta, \quad x'_5(\theta) = -l \cos \theta, \quad x'_6 = 0.$$

Kartézské souřadnice závaží  $m$  ukázané na obr. 1.10 tedy budou podle (1.63) tyto:

$$x_4(x_1, \theta) = x_1 + x'_4 = x_1 + l \sin \theta, \quad x_5(\theta) = x_2 + x'_5 = -l \cos \theta, \quad x_6 = x_3 + x'_6 = 0. \quad (1.78)$$

Vazbová podmínka svazující polohy obou těles tedy je proto obdobná k podmínce (1.57), kterou jsme uvedli jako příklad v úvodu tohoto odstavce:

$$|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| = \sqrt{(x_4 - x_1)^2 + (x_5 - x_2)^2 + (x_6 - x_3)^2} = l.$$

Vtištěné konzervativní síly působící na mechanickou soustavu (tvořenou oběma tělesy) jsou tíhové síly  $\mathbf{G}_1$  působící na těleso  $M$  a  $\mathbf{G}_2$  působící na závaží  $m$ :

$$\mathbf{G}_1 = M\mathbf{g} = (0, -Mg, 0), \quad \mathbf{G}_2 = m\mathbf{g} = (0, -mg, 0).$$

Na těleso  $M$  dále ještě působí pružná síla úměrná jeho kartézské souřadnici  $x_1$ , neboť jsme počátek souřadné soustavy umístili do bodu polohy tělesa  $M$ , ve kterém není pružina zdeformována. Vektor pružné síly tedy má složky

$$\mathbf{F}_1 = (-kx_1, 0, 0).$$

Potenciální energie  $V$  této mechanické soustavy je tedy v kartézských souřadnicích vyjádřena funkcí

$$V \equiv V(x_1, x_2, x_5) = \frac{1}{2}kx_1^2 + Mgx_2 + mgx_5,$$

protože

$$\begin{aligned} -\nabla_{\mathbf{r}_1} V &= -\left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \frac{\partial V}{\partial x_3}\right) = (-kx_1, -Mg, 0) = \mathbf{G}_1 + \mathbf{F}_1, \\ -\nabla_{\mathbf{r}_2} V &= -\left(\frac{\partial V}{\partial x_4}, \frac{\partial V}{\partial x_5}, \frac{\partial V}{\partial x_6}\right) = (0, 0, -mg) = \mathbf{G}_2 \end{aligned}$$

jsou výslednice vtištěných sil působících na každé z těles. Přejdeme-li od kartézských souřadnic k zobecněným prostřednictvím parametrických rovnic (1.77) a (1.78), potenciální energii mechanické soustavy nalezneme ve tvaru

$$V[x_1, x_2 = 0, x_5(\theta)] \equiv V(x_1, \theta) = \frac{1}{2}kx_1^2 - mgl \cos \theta.$$

Tahové síly  $\mathbf{T}_1$  působící na těleso  $M$  a  $\mathbf{T}_2$  působící na závaží  $m$  jsou silami holonomní vazby lanka, jejichž složky neznáme, dokud nezjistíme vývoj pohybového stavu mechanické soustavy.

Normálovou sílu  $\mathbf{N}_1$  působící na těleso  $M$  v důsledku jeho vazby na osu  $x_1$  již zde neuvádíme, neboť eliminace jejích složek proběhla přechodem k zobecněné souřadnici  $x_1$  jako parametru přímky totožné s osou  $x_1$ . To, že tyto složky ve výsledných rovnicích opravdu nevystupují, jsme již ukázali v odstavci 1.5.2 na str. 22.

Mechanická soustava tedy má dva stupně volnosti, neboť poloha obou těles je jednoznačně určena dvěma zobecněnými souřadnicemi  $x_1$  a  $\theta$ . Infinitesimální změny obou zobecněných souřadnic určují jejich infinitesimální posunutí. Složky posunutí tělesa  $M$  jsou podle (1.69) následující:

$$d\mathbf{r}_1 = (dx_1, 0, 0),$$

složky posunutí závaží  $m$  užitím (1.70) jsou tato:

$$d\mathbf{r}_2 = (dx_1, 0, 0) + \left(\frac{\partial x_4}{\partial \theta} d\theta, \frac{\partial x_5}{\partial \theta} d\theta, 0\right) = (dx_1, 0, 0) + (l \cos \theta d\theta, l \sin \theta d\theta, 0) = d\mathbf{r}_1 + d\mathbf{r}_2^{(1)},$$

kde

$$d\mathbf{r}_2^{(1)} = (\cos \theta, \sin \theta, 0) l d\theta.$$

Vektor  $d\mathbf{r}_1$  tedy představuje posunutí mechanické soustavy obou těles ve směru osy  $x_1$  o  $dx_1$  jako celku. Toto posunutí může zde být ovlivněno pouze vtištěnou silou  $\mathbf{F}_1$  od pružiny, neboť jedině ta působí v tomto směru. Tahové síly  $\mathbf{T}_2$  a  $\mathbf{T}_1$  ( $= -\mathbf{T}_2$ ) jsou pro translační pohyb obou těles jako celku vnitřními silami, a proto se při tomto posunutí vyruší.

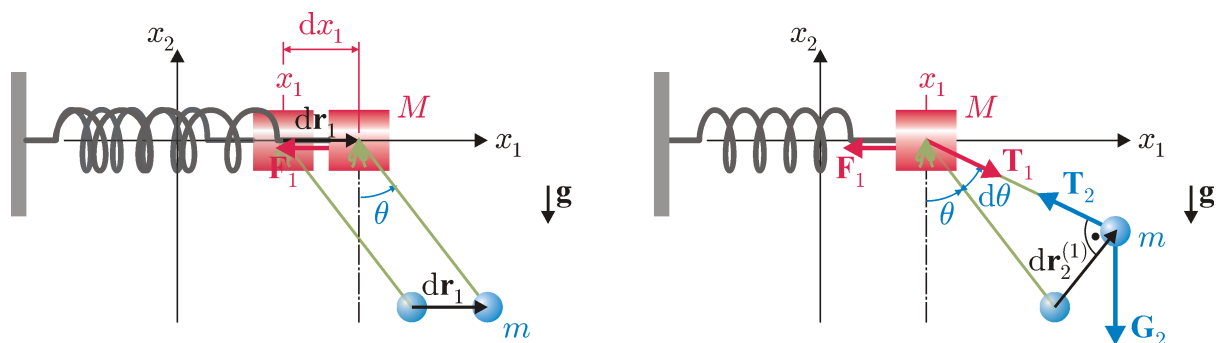
Vektor  $d\mathbf{r}_2^{(1)}$  naopak vyjadřuje posunutí závaží  $m$  vůči nehybnému tělesu  $M$  „ve směru“ zobecněné souřadnice  $\theta$  o  $d\theta$ , tedy v tečném směru k oblouku kružnice, jež opisuje vůči tělesu  $M$ . Zde sice působí všechny síly, avšak posunutí  $d\mathbf{r}_2^{(1)}$  je kolmé k  $\mathbf{T}_2$ , čímž dojde k eliminaci jejích složek, pokud se objeví skalární součin  $\mathbf{T}_2 \cdot d\mathbf{r}_2^{(1)}$ . Obě posunutí jsou ukázána na obr. 1.11.

Pohyb mechanické soustavy potom bude určen řešením rovnic (1.76) ve tvaru

$$M\ddot{x}_1 + m\ddot{x}_4 \frac{\partial x_4}{\partial x_1} = -\frac{\partial V}{\partial x_1} = -kx_1 \equiv Q_1 \quad (1.79)$$

$$m\ddot{x}_4 \frac{\partial x_4}{\partial \theta} + m\ddot{x}_5 \frac{dx_5}{d\theta} = -\frac{\partial V}{\partial \theta} = -mgl \sin \theta \equiv Q_\theta. \quad (1.80)$$

Vidíme, že zobecněná síla  $Q_1$  představuje působení vtištěných sil „ve směru“ zobecněné souřadnice  $x_1$ , což je pouze síla od pružiny  $\mathbf{F}_1 = (-kx_1, 0, 0)$ . Zobecněná síla  $Q_\theta$  vyjadřuje působení vtištěných sil „ve směru“ zobecněné souřadnice  $\theta$ . Tato zobecněná síla je rovna nenulové složce



Obrázek 1.11: Vlevo: Infinitesimální posunutí tělesa  $M$  i závaží  $m$  jako celku o  $d\mathbf{r}_1$ . Při tomto pohybu se soustava chová jako translačně se pohybující tuhé těleso, kdy se tahové síly lanka jako vnitřní síly vyruší. Zůstává pouze síla  $\mathbf{F}_1$  od pružiny působící „ve směru“  $x_1$ . Vpravo: Infinitesimální posunutí  $d\mathbf{r}_2^{(1)}$  závaží  $m$  „ve směru“  $\theta$ , přičemž těleso  $M$  je nehybné. Tahová síla  $\mathbf{T}_2$  působící na závaží  $m$  je kolmá k posunutí  $d\mathbf{r}_2^{(1)}$ , a proto  $\mathbf{T}_2 \cdot d\mathbf{r}_2^{(1)} = 0$ .

momentu síly  $\mathbf{M}_2$ , kterým působí tíhová síla  $\mathbf{G}_2$  na závaží  $m$  vzhledem k tělesu  $M$ , ve kterém je lanko zavěšeno:

$$\mathbf{M}_2 = \mathbf{r}' \times \mathbf{G}_2 = (l \sin \theta, -l \cos \theta, 0) \times (0, -mg, 0) = (0, 0, -mgl \sin \theta).$$

Řešením rovnic (1.79) a (1.80) budou funkce  $x_1(t)$  a  $\theta(t)$ , jejichž derivace podle času  $\dot{x}_1(t)$  a  $\dot{\theta}(t)$  jsou zobecněné rychlosti, které zde mají tento fyzikální význam: zobecněná rychlost  $\dot{x}_1(t)$  vyjadřuje, jak rychle se celá soustava pohybuje podél osy  $x_1$  a zobecněná rychlost  $\dot{\theta}(t)$  je okamžitá úhlová rychlost, se kterou se závaží  $m$  otáčí okolo tělesa  $M$ .

Spolu s počátečními podmínkami  $x_1(0)$ ,  $\theta(0)$ ,  $\dot{x}_1(0)$  a  $\dot{\theta}(0)$  bychom již vývoj pohybového stavu této soustavy jednoznačně určili.

Samotný pohyb této mechanické soustavy je vyšetřen až v úloze 1.8.5 na str. 64, neboť stále ještě nemáme pohybové rovnice, které obsahují pouze zobecněné souřadnice. Jejich nalezení se však budeme věnovat již v následujícím odstavci.

## 1.6 Eulerovy-Lagrangeovy rovnice (poprvé)

Ukázali jsme, že v případě vázaných částic jsme schopni z původních pohybových rovnic eliminovat všechny neznámé složky vazbových sil, pokud přejdeme od  $3N$  kartézských souřadnic  $x_i$  k  $M$  zobecněným souřadnicím  $q_j$  jako parametrů v rovnicích definujících křivky a plochy daných vazeb. Výsledek byl stejný, ať šlo o částice vázané na libovolnou křivku, viz (1.38) na str. 23; libovolnou plochu, viz (1.49) a (1.50) na str. 27; či jedna k druhé, viz (1.76) na str. 34. Křivky i plochy, na které jsou částice vázány, se dokonce mohou jakkoli (i se zrychlením) pohybovat. Obecné transformační vztahy mezi kartézskými souřadnicemi a zobecněnými souřadnicemi

$$x_i \equiv x_i(q_1, q_2, \dots, q_M, t) \quad (i = 1, 2, \dots, 3N) \quad (1.81)$$

potom musejí obsahovat i čas  $t$ .

Ve všech případech se podařilo samotné pohybové rovnice nalézt v obecném tvaru

$$\sum_{i=1}^{3N} m_i \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2, \dots, M), \quad (1.82)$$

kde počet zobecněných souřadnic  $M$  rovněž znamená i počet stupňů volnosti mechanické soustavy. Ten získáme následujícím postupem: Je-li některá částice vázána na křivku, sníží se původní počet  $3N$  stupňů volnosti mechanické soustavy o dva, je-li vázána na plochu, sníží se o jeden. Každá vazba takto postupně snižuje počet stupňů volnosti, až jich nakonec zůstane  $M$ . Zobecněné souřadnice již jednoznačně stanoví polohy všech  $N$  částic ve shodě s vazbami.

Infinitesimální změny zobecněných souřadnic  $dq_j$  určují pouze taková posunutí jednotlivých částic, která jsou vazbami dovolena. Zobecněné síly

$$Q_j \equiv -\frac{\partial V}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2, \dots, M), \quad (1.83)$$

představují silová působení vtištěných konzervativních sil na danou mechanickou soustavu částic „ve směru“ příslušné zobecněné souřadnice  $q_j$ . Zobecněné rychlosti

$$\dot{q}_j \equiv \frac{dq_j}{dt} \quad (j = 1, 2, \dots, M), \quad (1.84)$$

udávají, jak rychle se částice pohybují „ve směru“ dané zobecněné souřadnice  $q_j$ , jenž vazba dovoluje.

Pohybové rovnice ve tvaru (1.82) však stále ještě obsahují též i druhé derivace kartézských souřadnic podle času  $\ddot{x}_i$ . Tento tvar pohybových rovnic tedy zatím není zcela výhodný, jak by mohl být. Proto jsme se v předešlých příkladech konkrétních mechanických soustav ani nepokoušeli tyto pohybové rovnice řešit, ale odkázali jsme se až na úlohy v přespříštím odstavci poté, co výhodný tvar pohybových rovnic nalezneme a popíšeme některé obecné metody jejich integrace.

Chceme se tedy věnovat tomu, abychom získali nové pohybové rovnice, jež budou plně obsahovat pouze zobecněné souřadnice  $q_j$  a zobecněné rychlosti  $\dot{q}_j$ . Vyjdeme z pohybových rovnic v kartézských souřadnicích ve tvaru (1.25)

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) = -\frac{\partial V}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \dots, 3N) \quad (1.85)$$

a pro přechod od kartézských souřadnic ke zobecněným použijeme transformačními vztahy (1.81), tj.

$$x_i \equiv x_i(q_1, q_2, \dots, q_M, t) = x_i(q_j, t) \quad (i = 1, 2, \dots, 3N). \quad (1.86)$$

Zkoumejme parciální derivaci kinetické energie  $T$  mechanické soustavy podle zobecněné rychlosti  $\dot{q}_j$ . Nezapomínáme při tom na to, že kinetická energie byla původně funkcí všech kartézských složek rychlostí, tj.  $T \equiv T(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_{3N})$ . Hledáme tudíž všechny možné explicitní závislosti kartézských složek rychlostí  $\dot{x}_i$  na dané zobecněné rychlosti  $\dot{q}_j$ . Parciální derivaci tudíž nalezneme ve tvaru

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j}. \quad (1.87)$$

Každá kartézská složka rychlosti je rovna totální derivaci  $x_i$  podle času. Vzhledem k (1.86) tedy dostáváme

$$\dot{x}_i \equiv \frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^M \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial x_i}{\partial t}. \quad (1.88)$$

Zde si všimějme, že kartézské souřadnice rychlosti  $\dot{x}_i$  jsou obecně funkcemi nejen všech zobecněných souřadnic  $q_j$  a času  $t$ , jak vyplývá z transformačních vztahů (1.81), ale navíc i všech zobecněných rychlostí  $\dot{q}_j$ , tj.

$$\dot{x}_i \equiv \dot{x}_i(q_j, \dot{q}_j, t) \quad (i = 1, 2, \dots, 3N). \quad (1.89)$$

Z (1.88) potom plyne, že

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial x_i}{\partial q_j},$$

neboť suma v (1.88) obsahuje pouze jediný člen s  $\dot{q}_j$  (pro dané  $j$ ) a ten je navíc přímo úměrný  $\dot{q}_j$ . Parciální derivace  $T$  podle  $\dot{q}_j$  uvedená v (1.87) tak nabývá tvaru

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_j}.$$

Nyní provedeme totální derivaci podle času této parciální derivace.<sup>22</sup>

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) &= \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) = \sum_{i=1}^{3N} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) = \\ &= \sum_{i=1}^{3N} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right). \end{aligned} \quad (1.90)$$

Nejprve prozkoumáme první sumu. Tu můžeme za pomoci vztahů (1.6) na str. 12 a pohybových rovnic (1.82) přepsat do tvaru

$$\sum_{i=1}^{3N} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{3N} m_i \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = - \frac{\partial V}{\partial q_j}, \quad (1.91)$$

neboť stále používáme jen takové zobecněné souřadnice, abychom eliminovali vazbové síly. Ve druhé sumě ve vztahu (1.90) prozatím rozepíšeme pouze časovou derivaci

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right). \quad (1.92)$$

<sup>22</sup>Používáme přitom běžných postupů při derivování: derivace sumy je rovna sumě derivací a dále pak derivace součinu funkcí je rovna součtu derivace první funkce násobené nederivovanou druhou funkcí a derivace druhé funkce násobené nederivovanou první funkcí.

Uvědomujeme si přitom, že derivovaná funkce  $\partial x_i / \partial q_j$  je vzhledem k transformačním vztahům (1.86) rovněž obecně funkcí všech zobecněných souřadnic  $q_j$  a také času  $t$ . Její totální derivace podle času tedy bude následující:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) = \sum_{k=1}^M \frac{\partial}{\partial q_k} \left( \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) \dot{q}_k + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right).$$

Protože proměnné  $q_j$  a  $t$  jsou nezávislé a dále předpokládáme, že funkce  $x_i$  jsou ve všech bodech diferencovatelné, nezáleží na pořadí smíšených parciálních derivací.<sup>23</sup> Potom

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) = \sum_{k=1}^M \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right) \dot{q}_k + \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \frac{\partial x_i}{\partial t} \right).$$

Jelikož členy v sumě jsou nyní derivovány nejprve podle  $q_k$  a sumace probíhá přes index  $k$ , můžeme sumu derivací podle  $q_j$  vyjádřit jako touž derivaci celého součtu všech zúčastněných členů:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) = \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \sum_{k=1}^M \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial x_i}{\partial t} \right).$$

Poslední závorka však zřejmě představuje totální derivaci  $x_i$  podle času, viz (1.88). Pro výraz (1.92) tedy platí

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) = \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \frac{dx_i}{dt} \right) = \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j}.$$

Vrátíme-li se zpět k (1.90), s přihlédnutím k tomu, co jsme právě zjistili, dostáváme

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) = -\frac{\partial V}{\partial q_j} + \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j}.$$

Protože kinetická energie  $T$  mechanické soustavy byla původně funkcí pouze všech kartézských složek rychlostí  $\dot{x}_i$ , je poslední suma rovna parciální derivaci  $T$  podle  $q_j$ . Proto

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) = -\frac{\partial V}{\partial q_j} + \frac{\partial T}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j} (T - V). \quad (1.93)$$

Vzhledem k tomu, že potenciální energie  $V$  mechanické soustavy nemůže záviset na zobecněných (ani kartézských) rychlostech, platí

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} (T - V) = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}.$$

Rovnici (1.93) pak můžeme přepsat do tvaru

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} (T - V) \right] = \frac{\partial}{\partial q_j} (T - V). \quad (1.94)$$

Rozvzpomeneme-li se nyní na definici Lagrangeovy funkce (1.26) na str. 17, která byla funkcí kartézských souřadnic a složek rychlostí, při přechodu k zobecněným souřadnicím bude funkcí zobecněných souřadnic, zobecněných rychlostí a času

$$L [x_i(q_j, t); \dot{x}_i(q_j, \dot{q}_i, t)] \equiv L(q_j, \dot{q}_j, t) \equiv T [\dot{x}_i(q_j, \dot{q}_i, t)] - V [x_i(q_j, t)]. \quad (1.95)$$

<sup>23</sup>Důkaz je podán v Dodatku 1 na str. 231.



Lagrangeova funkce s těmito proměnnými (namísto kartézských souřadnic a rychlostí) obsahuje kompletní informaci o pohybovém stavu mechanické soustavy, a též i o veškerých silových interakcích působících na všechny částice, působí-li konzervativní vtištěné síly a síly holonomních vazeb.

Potom v rovnici (1.94) Lagrangeovu funkci poznáváme a nacházíme tak konečnou podobu pohybových rovnic pro všechna  $j$ :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2, \dots, M). \quad (1.96)$$

Těmto rovnicím se říká *Eulerovy-Lagrangeovy rovnice* nebo *Lagrangeovy rovnice druhého druhu* a jsou pohybovými rovnicemi každé mechanické soustavy, na níž působí jakékoli vtištěné konzervativní síly a libovolné holonomní vazby. Vidíme, že mají formálně stejnou podobu jako pohybové rovnice v kartézských souřadnicích (1.27) na str. 17, avšak Eulerovy-Lagrangeovy rovnice (1.96) byly odvozeny pro použití výhradně zobecněných souřadnic  $q_j$  a zobecněných rychlostí  $\dot{q}_j$ .

Z toho důvodu teprve tento tvar pohybových rovnic nabízí možnosti jak efektivně sestavovat soustavy diferenciálních rovnic pro jednotlivé zobecněné souřadnice v široké třídě komplexnějších úloh mechanických soustav. Pokud budeme v této kapitole hovořit o *pohybových rovnicích*, budeme mít většinou na mysli Eulerovy-Lagrangeovy rovnice (1.96).

## 1.7 Metody řešení pohybových rovnic

Přestože jsme vyjádřením obecných pohybových rovnic (1.95) velmi pokročili, postupy hledání jejich řešení zdaleka nebývají triviální. V těchto případech se zpravidla snažíme využít nějakých obecných fyzikálních principů, které cestu usnadní nebo alespoň poskytnou kvalitativní odhady. Proto dříve, než se pustíme do výpočtů časového vývoje pohybového stavu konkrétních mechanických soustav, zaměříme se na tyto obecné fyzikální principy.

### 1.7.1 Zobecněná hybnost a zákon zachování hybnosti

Složky hybnosti v kartézských souřadnicích jsme ve vztahu (1.5) na str. 12 vyjádřili prostřednictvím parciální derivace kinetické energie  $T$  mechanické soustavy podle příslušné kartézské složky  $\dot{x}_i$  rychlosti, tj.

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = m_i \dot{x}_i. \quad (1.97)$$

Již jsme však přešli k zobecněným souřadnicím, takže pouze ony nyní určují polohy všech částic mechanické soustavy. Rychlost každé částice „ve směru“ dané zobecněné souřadnice  $q_j$  udává příslušná zobecněná rychlost  $\dot{q}_j$ . Parciální derivací kinetické energie  $T$  podle  $\dot{q}_j$  bychom tedy mohli vyjádřit jakousi hybnost mechanické soustavy „ve směru“ zobecněné souřadnice  $q_j$ . Pokud bude zobecněná souřadnice reprezentována přímo některou z kartézských souřadnic, tato hybnost přejde zpět v příslušnou kartézskou složku hybnosti (1.97). Protože potenciální energie  $V$  není funkcí zobecněných rychlostí, můžeme namísto derivování kinetické energie  $T$  použít parciální derivaci Lagrangeovy funkce (1.95) jako nositelky veškeré informace o pohybovém stavu mechanické soustavy. Složky této nové hybnosti tedy definujeme jako

$$p_j \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \quad (j = 1, 2, \dots, M) \quad (1.98)$$

a nazývají se *zobecněné hybnosti*. Parciální derivace naznačuje, že tyto veličiny mohou být obecně funkcemi všech zobecněných souřadnic, zobecněných rychlostí a času:

$$p_j \equiv p_j(q_k, \dot{q}_k, t) \quad (j, k = 1, 2, \dots, M). \quad (1.99)$$

Pokud Lagrangeova funkce explicitně nezávisí na dané zobecněné souřadnici  $q_j$ , tzn.

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad (1.100)$$

má toto velmi zásadní důsledky. Pohybová (Eulerova-Lagrangeova) rovnice pro dané  $j$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0,$$

totiž nyní říká, že totální derivace příslušné zobecněné hybnosti  $p_j$  je rovna nule. To ovšem znamená, že samotná  $p_j$  musí být po celou dobu rovna nějaké konstantě:

$$p_j = \text{konst.} \quad (1.101)$$

V tomto případě říkáme, že platí *zákon zachování (zobecněné) hybnosti* a zobecněná souřadnice  $q_j$  se nazývá *cyklická souřadnice*. Rovnice (1.101) může vzhledem k (1.99) obsahovat pouze zobecněné souřadnice, zobecněné rychlosti a čas, což znamená, že představuje již diferenciální rovnici prvního řádu. V důsledku zákona zachování hybnosti se nám tedy podařilo částečně integrovat příslušnou pohybovou rovnici (1.96) pro dané  $j$ , a proto se této rovnici říká *první integrál pohybových rovnic*.

### 1.7.2 Integrál energie a zákon zachování mechanické energie

Vyjádríme totální derivaci Lagrangeovy funkce  $L(q_j, \dot{q}_j, t)$  podle času:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{j=1}^M \left( \frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right) + \frac{\partial L}{\partial t}. \quad (1.102)$$

Druhý člen v závorce můžeme přepsat tak, že rozepíšeme následující derivaci součinu:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \dot{q}_j.$$

Po dosazení zpět do (1.102) dostáváme

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{j=1}^M \left[ \frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \dot{q}_j \right] + \frac{\partial L}{\partial t}. \quad (1.103)$$

Vzhledem k pohybové rovnici (1.96) pro dané  $j$  musí být součet prvního a třetí členu v hranaté závorce roven nule, protože se v obou objevuje zobecněná rychlost  $\dot{q}_j$ . Zbývá suma prostředních časových derivací, které vyjádříme jako časovou derivaci sumy derivovaných součinů, takže (1.103) nabývá tvaru

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \sum_{j=1}^M \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right) + \frac{\partial L}{\partial t}. \quad (1.104)$$

Derivaci sumy převedeme na druhou stranu a celou rovnicí vynásobíme  $-1$ :

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_{j=1}^M \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right) - \frac{dL}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \quad (1.105)$$

Rozdíl časových derivací můžeme napsat jako časovou derivaci rozdílu, tj.

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_{j=1}^M \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L \right) = -\frac{\partial L}{\partial t}. \quad (1.106)$$

Výraz v závorce je pro naše další výpočty velmi důležitý a proto jej označíme

$$h \equiv \sum_{j=1}^M \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L. \quad (1.107)$$

Jelikož se v definici této funkce nacházejí pouze parciální derivace  $L(q_j, \dot{q}_j, t)$  podle  $\dot{q}_j$ , dále přímo  $\dot{q}_j$  a nakonec i samotná Lagrangeova funkce  $L$ , proměnné této nové funkce  $h$  jsou obecně stejné jako proměnné  $L$ , tj.

$$h \equiv h(q_j, \dot{q}_j, t). \quad (1.108)$$

Z tvaru (1.106) je zřejmé, že, pokud Lagrangeova funkce explicitně nezávisí na čase,<sup>24</sup> platí

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dh}{dt} = 0. \quad (1.109)$$

Nulová totální derivace říká, že funkce  $h$  je po celou dobu pohybu mechanické soustavy konstantní. Funkci  $h$  jsme definovali vztahem (1.107) a  $L$  je obecně funkcí všech  $q_j$ ,  $\dot{q}_j$ , avšak nyní ne explicitní funkcí času. Tyto úvahy nás vedou k závěru, že platí rovnice

$$h(q_j, \dot{q}_j) = \text{konst.}, \quad (1.110)$$

kteřá obsahuje nejvýše první derivace zobecněných souřadnic, tj.  $\dot{q}_j$  (zobecněné rychlosti). Rovnice (1.110) tedy představuje diferenciální rovnici prvního řádu a můžeme ji tudíž nazvat prvním integrálem pohybových rovnic. Samotné funkci  $h(q_j, \dot{q}_j)$  se říká *integrál energie*.

Nyní rozebereme, čemu je tento integrál energie roven. Zvykli jsme si na to, že všechny veličiny týkající se mechanické soustavy získáváme pouze z její Lagrangeovy funkce  $L$ . Na chvíli se však ještě vraťme ke kinetické energii  $T$ , která je na rozdíl od potenciální energie  $V$  funkcí i zobecněných rychlostí  $\dot{q}_j$ . Samotnou Lagrangeovu funkci dále nahradíme rozdílem  $T - V$ , viz (1.95). Integrál energie  $h$  definovaný vztahem (1.107) je tedy následující

$$h \equiv \sum_{j=1}^M \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - (T - V). \quad (1.111)$$

Kinetická energie vyjádřená v kartézských složkách rychlosti byla podle (1.4) na str. 11 ve tvaru

$$T = \sum_{i=1}^{3N} \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2. \quad (1.112)$$

<sup>24</sup>Jsou tím míněny všechny případy, ve kterých se čas  $t$  projevuje v Lagrangeově funkci  $L$  nanejvýš prostřednictvím zobecněných souřadnic  $q_j$  a zobecněných rychlostí  $\dot{q}_j$ . Kromě nich  $L$  neobsahuje žádné další funkce času.

Protože Lagrangeova funkce teď explicitně na čase  $t$  nezáleží, v transformačních rovnicích (1.81) se nyní čas rovněž neobjeví. Budou tedy následující:

$$x_i \equiv x_i(q_1, q_2, \dots, q_M) = x_i(q_j) \quad (i = 1, 2, \dots, 3N). \quad (1.113)$$

Kartézské složky rychlosti jsou potom podle (1.88)

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^M \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \quad (i = 1, 2, \dots, 3N)$$

a jejich kvadráty, které vystupují v kinetické energii (1.112),

$$\dot{x}_i^2 = \left( \sum_{j=1}^M \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \right)^2 = \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^M \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \frac{\partial x_i}{\partial q_l} \dot{q}_k \dot{q}_l. \quad (i = 1, 2, \dots, 3N). \quad (1.114)$$

Vidíme, že jsou rovny součtu členů, v nichž vystupují postupně součiny obecně všech možných dvojic zobecněných rychlostí  $\dot{q}_k \dot{q}_l$ . Zavedeme-li označení

$$\alpha_{ikl} \equiv \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \frac{\partial x_i}{\partial q_l}, \quad (1.115)$$

můžeme vztah (1.114) formálně vyjádřit ve tvaru

$$\dot{x}_i^2 = \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^M \alpha_{ikl} \dot{q}_k \dot{q}_l \quad (i = 1, 2, \dots, 3N), \quad (1.116)$$

který se nazývá *kvadratická forma*. Kinetickou energii  $T$  jako funkci zobecněných souřadnic a zobecněných rychlostí pak dostaneme dosazením tohoto výsledku do (1.112):

$$\begin{aligned} T &= \sum_{i=1}^{3N} \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 = \sum_{i=1}^{3N} \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^M \frac{1}{2} m_i \alpha_{ikl} \dot{q}_k \dot{q}_l = \\ &= \sum_{i=1}^{3N} \left( \sum_{j=1}^M \frac{1}{2} m_i \alpha_{ijj} \dot{q}_j^2 + \sum_{k=1}^M \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^M \frac{1}{2} m_i \alpha_{ikl} \dot{q}_k \dot{q}_l \right), \end{aligned} \quad (1.117)$$

kde jsme dvojitou sumu přes  $k$  a  $l$  rozepsali na členy se stejnými zobecněnými rychlostmi  $\dot{q}_j^2$  a s různými zobecněnými rychlostmi  $\dot{q}_k \dot{q}_l$ , kde  $l \neq k$ . Parciální derivaci  $T$  podle zobecněné rychlosti  $\dot{q}_j$  pak vyjádříme tak, že budeme hledat pouze ty členy, které obsahují  $\dot{q}_j$  pro danou konkrétní hodnotu  $j$  a nenecháváme se přitom zmýlit tím, že v dvojitě sumě používáme jiné názvy indexů.<sup>25</sup>

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left[ \sum_{i=1}^{3N} \left( \sum_{j=1}^M \frac{1}{2} m_i \alpha_{ijj} \dot{q}_j^2 + \sum_{k=1}^M \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^M \frac{1}{2} m_i \alpha_{ikl} \dot{q}_k \dot{q}_l \right) \right] = \\ &= \sum_{i=1}^{3N} \left( m_i \alpha_{ijj} \dot{q}_j + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^M \frac{1}{2} m_i \alpha_{ijl} \dot{q}_l + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^M \frac{1}{2} m_i \alpha_{ikj} \dot{q}_k \right). \end{aligned}$$

<sup>25</sup>V dvojitě sumě hledáme takové členy, jejichž indexy  $k$  a  $l$  jsou právě rovny  $j$ . Takové členy jsou dva: když  $k = j$  a když  $l = j$ , a proto se z dvojitě sumy stanou dvě jednoduché sumy.

Obě sumy v závorce jsou totožné, neboť indexy  $k$  a  $l$  jsou rovnocenné a podle (1.115) platí  $\alpha_{ikj} = \alpha_{ijk}$ , proto

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^{3N} \left( m_i \alpha_{ijj} \dot{q}_j + 2 \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^M \frac{1}{2} m_i \alpha_{ijl} \dot{q}_j \right) = \sum_{i=1}^{3N} \left( m_i \alpha_{ijj} \dot{q}_j + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^M m_i \alpha_{ijl} \dot{q}_l \right).$$

Tuto rovnici dále vynásobíme  $\dot{q}_j$ :

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = \sum_{i=1}^{3N} \left( m_i \alpha_{ijj} \dot{q}_j + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^M m_i \alpha_{ijl} \dot{q}_l \right) \dot{q}_j = \sum_{i=1}^{3N} \left( m_i \alpha_{ijj} \dot{q}_j^2 + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^M m_i \alpha_{ijl} \dot{q}_l \dot{q}_j \right)$$

a provedeme sumu přes všechna  $j$ , přičemž index  $j$  je nezávislý na indexu  $i$  a proto zaměníme pořadí příslušných sum:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^M \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j &= \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^{3N} \left( m_i \alpha_{ijj} \dot{q}_j^2 + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^M m_i \alpha_{ijl} \dot{q}_l \dot{q}_j \right) = \\ &= \sum_{i=1}^{3N} \left( \sum_{j=1}^M m_i \alpha_{ijj} \dot{q}_j^2 + \sum_{j=1}^M \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^M m_i \alpha_{ijl} \dot{q}_l \dot{q}_j \right). \end{aligned}$$

Zaměníme-li dále i pořadí součinu  $\dot{q}_l \dot{q}_j$  a přejmenujeme-li ve dvojitě sumě index  $j$  na  $k$ , dostáváme

$$\sum_{j=1}^M \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = \sum_{i=1}^{3N} \left( \sum_{j=1}^M m_i \alpha_{ijj} \dot{q}_j^2 + \sum_{k=1}^M \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^M m_i \alpha_{ikl} \dot{q}_k \dot{q}_l \right) = \sum_{i=1}^{3N} \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^M m_i \alpha_{ikl} \dot{q}_k \dot{q}_l.$$

Tento výsledek se od vyjádření samotné kinetické energie  $T$  vztahem (1.117) liší pouze o faktor 1/2. Proto platí

$$\sum_{j=1}^M \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = 2T. \quad (1.118)$$

Podle (1.111) potom integrál energie

$$h = \sum_{j=1}^M \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - (T - V) = 2T - T + V = T + V \quad (1.119)$$

zřejmě představuje mechanickou energii  $E$  soustavy částic. Podle (1.110)

$$h(q_j, \dot{q}_j) = T + V \equiv E = \text{konst.}, \quad (1.120)$$

je navíc mechanická energie konstantní. Říkáme, že platí *zákon zachování mechanické energie*. Rovnice (1.120) je tedy jiným vyjádřením rovnice (1.110), která je prvním integrálem pohybových rovnic. Připomeňme, že jsme k tomuto závěru došli za předpokladu, že

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0.$$

## 1.8 Řešené úlohy na Eulerovy-Lagrangeovy rovnice

Našli jsme tvar pohybových rovnic (1.96) a objevili jejich první integrály (1.101) a (1.120). Pomocí těchto nástrojů již můžeme začít řešit řadu konkrétních úloh týkajících se mechanických soustav podrobených konzervativním vtištěným silám a holonomním vazbám.

Výpočet bude sestávat z následujících kroků, jejichž podstatu jsme již detailně objasnili:

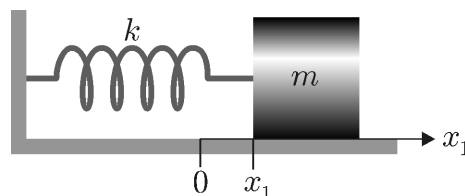
- **Počet stupňů volnosti** určíme podle shrnutí, které jsme učinili na začátku odst. 1.6 na str. 38.
- **Hledání zobecněných souřadnic**, které jsou pro danou úlohu vhodné, provedeme pomocí úvah, jež jsme rozebrali v odst. 1.5 na str. 19.
- **Vyjádření Lagrangeovy funkce** uděláme tak, že nejprve vyjádříme kinetickou a potenciální energii v kartézských souřadnicích, viz odst. 1.2 na str. 10 a odst. 1.3 na str. 12. Z kartézských souřadnic potom pomocí vhodných transformačních vztahů popsanych v odst. 1.6 na str. 38 přejdeme k zobecněným souřadnicím a napíšeme Lagrangeovu funkci podle (1.95) na str. 40.
- **Sestavení pohybových rovnic** je rovněž popsáno v odst. 1.6 na str. 38, především vztahem (1.96) na str. 41.
- **Řešení pohybových rovnic** bývá závěrečným, ale nejméně univerzálním krokem. Každá úloha zde vyžaduje trochu jiné přístupy. Budeme se snažit využít všech možných vlastností mechanických soustav, např. **zákonů zachování**, viz odst. 1.7 na str. 41, popř. některých matematických postupů, které známe odjinud.

Rozbor řešení úloh bude vždy na základě uvedených kroků, ale odkazy na předchozí text již nebudeme uvádět.

### 1.8.1 Harmonický oscilátor (poprvé)

*Harmonický oscilátor* sestává ze závaží o hmotnosti  $m$  připevněného k jednomu konci vodorovné pružiny o tuhosti  $k$ , jejíž druhý konec je pevně vetknut do zdi. Závaží  $m$  se může pohybovat bez tření po vodorovné podlaze po přímce rovnoběžné s osou pružiny. Pružina má zanedbatelnou hmotnost. Určete časový vývoj pohybového stavu této mechanické soustavy.

**Řešení:** Zvolíme kartézský souřadný systém takový, že osa  $x_1$  je rovnoběžná s osou pružiny a její počátek umístíme do polohy závaží  $m$ , ve které je pružina nezdeformována, viz obr. 1.12.



Obrázek 1.12: Harmonický oscilátor. Pokud se závaží nachází v poloze  $x_1 = 0$ , pružina je nezdeformována.

### • Počet stupňů volnosti

Soustava sestává z jednoho tělesa — závaží  $m$ . Toto těleso se pohybuje translačně, proto jej můžeme nahradit částicí a pro mechanickou soustavu tedy platí:  $N = 1$ . Závaží je vázáno k přímce  $x_1$ . Protože každá vazba na křivku vždy snižuje počet stupňů volnosti mechanické soustavy o 2, původní  $3N = 3$  stupně volnosti se zredukuje na  $M = 3N - 2 = 1$ . Znamená to, že tři kartézské souřadnice budou jednoznačně vyjádřeny pomocí jedné zobecněné souřadnice.

### • Hledání zobecněných souřadnic

Závaží  $m$  se může pohybovat pouze podél osy  $x_1$ , a proto jeho kartézská souřadnice  $x_1$  je hledanou jedinou zobecněnou souřadnicí, neboť platí

$$x_1 \neq 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0.$$

Kartézská složka rychlosti je rovna derivaci příslušné kartézské souřadnice podle času  $\dot{x}_1$ .

### • Vyjádření Lagrangeovy funkce

Kinetickou energii  $T$  této mechanické soustavy určíme snadno:

$$T = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} m \dot{x}_i^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2,$$

stejně tak i potenciální energii  $V$  mechanické soustavy:<sup>26</sup>

$$V = \frac{1}{2} k x_1^2. \quad (1.121)$$

Lagrangeova funkce  $L$  této mechanické soustavy je potom následující:

$$L \equiv T - V = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 - \frac{1}{2} k x_1^2. \quad (1.122)$$

### • Sestavení pohybové rovnice

Pohybová rovnice odpovídá jediné zobecněné souřadnici  $x_1$ . Nejprve vyjádříme parciální derivaci  $L$  podle  $\dot{x}_1$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_1} \left( \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 - \frac{1}{2} k x_1^2 \right) = m \dot{x}_1$$

a provedeme totální derivaci této parciální derivace podle času:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) = \frac{d}{dt} (m \dot{x}_1) = m \ddot{x}_1.$$

Lagrangeovu funkci (1.122) dále ještě parciálně zderivujeme podle  $x_1$ :

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 - \frac{1}{2} k x_1^2 \right) = -k x_1.$$

<sup>26</sup>Kontrolu, že jsme tvar potenciální energie napsali správně, pomocí obecného výpočtu působící výslednice vtištěných sil  $\mathbf{F} = -\nabla_{\mathbf{r}_n} V$  již necháváme na čtenáři.

Pohybovou rovnicí tedy nalezneme ve tvaru:<sup>27</sup>

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) = \frac{\partial L}{\partial x_1} \quad \Rightarrow \quad m\ddot{x}_1 = -kx_1. \quad (1.123)$$

### • Řešení pohybové rovnice

Je třeba řešit pohybovou rovnicí, kterou přepíšeme do tvaru

$$\ddot{x}_1 + \frac{k}{m}x_1 = 0. \quad (1.124)$$

Vidíme, že tato rovnice je obyčejnou diferenciální rovnicí druhého řádu s nulovou pravou stranou. Jejím řešením je funkce

$$x_1(t) = A \sin(\Omega t + \phi), \quad \text{kde} \quad \Omega \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (1.125)$$

Vystupují zde dvě integrační konstanty  $A$  a  $\phi$ , které se určí z počátečních podmínek  $x_1(0) = x_0$  a  $\dot{x}_1(0) = v_0$ . Zpětným dosazením se lze snadno přesvědčit o tom, že tato funkce je vskutku řešením pohybové rovnice (1.124). Kartézská složka rychlosti potom vyjde

$$\dot{x}_1(t) = \Omega A \cos(\Omega t + \phi), \quad (1.126)$$

kteřá je zde zároveň zobecněnou rychlostí.

Integrační konstanty určíme následujícím postupem. Nejprve do funkcí (1.125) a (1.126) popisující časový vývoj souřadnice  $x_1$  a složky rychlosti  $\dot{x}_1$  dosadíme za  $t = 0$ :

$$x_1(0) = A \sin \phi = x_0, \quad \dot{x}_1(0) = \Omega A \cos \phi = v_0. \quad (1.127)$$

Druhou rovnicí vydělíme  $\Omega$ , obě rovnice povýšíme na druhou a sečteme je:

$$A^2 \sin^2 \phi + A^2 \cos^2 \phi = A^2 = x_0^2 + \frac{v_0^2}{\Omega^2}. \quad (1.128)$$

Integrační konstanta  $A$  je tedy dána počátečními podmínkami takto:

$$A = \pm \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\Omega^2}}. \quad (1.129)$$

Volbu znaménka u integrační konstanty  $A$  ještě budeme diskutovat.

Integrační konstantu  $\phi$  dostaneme tak, že druhou z rovnic (1.127) opět vydělíme  $\Omega$  a druhou rovnicí vydělíme první:

$$\frac{\cos \phi}{\sin \phi} \equiv \cotg \phi = \frac{v_0}{\Omega x_0}, \quad (1.130)$$

a tedy

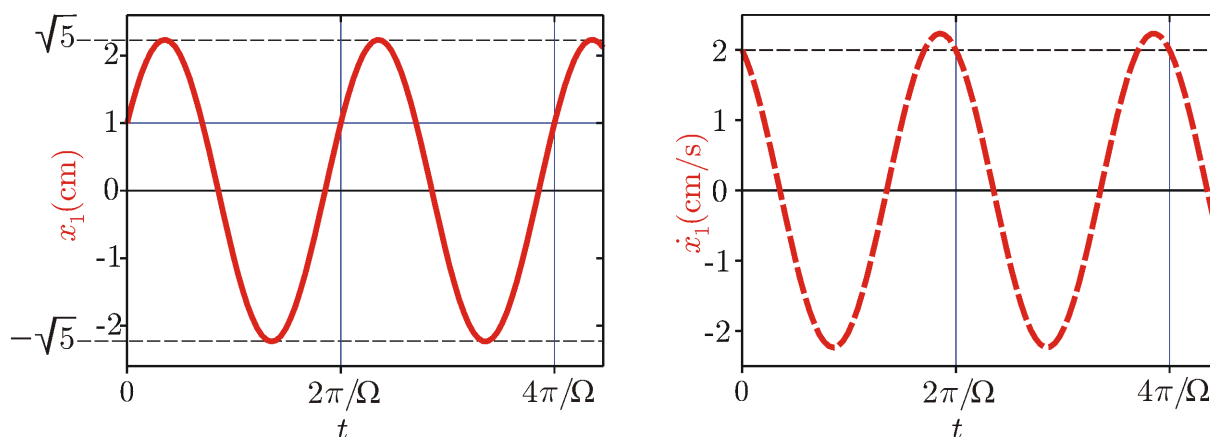
$$\phi = \operatorname{arccotg} \left( \frac{v_0}{\Omega x_0} \right), \quad \text{anebo} \quad \phi = \operatorname{arccotg} \left( \frac{v_0}{\Omega x_0} \right) + \pi, \quad (1.131)$$

neboť funkce arkuskotangens nabývá funkčních hodnot z intervalu  $(0; \pi)$ . Hodnotu  $\phi$  a znaménko konstanty  $A$  nakonec zvolíme tak, aby obě počáteční podmínky (1.127) platily.

Časový vývoj  $x_1$  a  $\dot{x}_1$  určený funkcemi (1.125) a (1.126) je znázorněn na obr. 1.13.

<sup>27</sup>Pohybovou rovnicí harmonického oscilátoru známe ze základního kurzu mechaniky, viz např. D. Halliday, R. Resnick, J. Walker: *Fyzika*. vydání, VUTIUM, Brno 2013, kap. 15.





Obrázek 1.13: Vlevo: Závislost zobecněné souřadnice  $x_1$  na čase podle (1.125). Vpravo: Závislost zobecněné rychlosti  $\dot{x}_1$  na čase podle (1.126). Za konstanty byly dosazeny tyto hodnoty:  $k/m = 1 \text{ s}^{-2}$ ;  $x_0 = 1 \text{ cm}$ ;  $v_0 = 2 \text{ cm/s}$ .

### Zákon zachování

Přestože jsme úlohu kompletně vyřešili, budeme se ještě zabývat zákony zachování pro harmonický oscilátor. Lagrangeova funkce (1.122) explicitně nezávisí na čase, neboli

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0.$$

Integrál energie

$$h = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \dot{x}_1 - L = m\dot{x}_1^2 - \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 = T + V \quad (1.132)$$

je proto roven mechanické energii a dále je konstantní. Rovnice

$$\frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 = \text{konst.} \equiv E \quad (1.133)$$

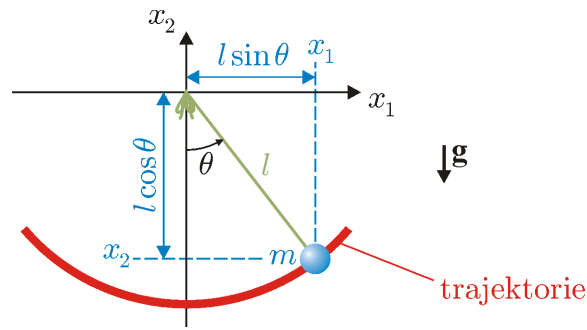
je tudíž prvním integrálem pohybové rovnice. V následující kapitole na str. 139 se přesvědčíme o tom, že řešení pohybové rovnice (1.124), které je vyjádřeno funkcí (1.125), je zároveň i řešením tohoto prvního integrálu, přičemž vyjde

$$E = \frac{1}{2}kA^2. \quad (1.134)$$

## 1.8.2 Matematické kyvadlo

Závaží o hmotnosti  $m$  je přivázáno na jeden konec lanka délky  $l$ , jež má zanedbatelnou hmotnost. Druhý konec lanka je pevně přivázán ke stropu. Závaží  $m$  se pohybuje v tíhovém poli Země charakterizovaném tíhovým zrychlením  $\mathbf{g}$ . Pohyb závaží probíhá pouze v jedné rovině, v níž se neustále nachází lanko a vektor  $\mathbf{g}$ . Rozměry závaží jsou podstatně menší než délka lanka  $l$ . Určete, jaký bude vývoj pohybového stavu této mechanické soustavy.

**Řešení:** Tuto úlohu jsme začali rozebírat v příkladu ukázaném v odstavci 1.5.2 na str. 22. Protože jsme však ještě neměli k dispozici vše, co již nyní víme, samotný pohyb matematického kyvadla jsme nevyšetřovali.



Obrázek 1.14: Matematické kyvadlo.

Zvolíme kartézský souřadný systém takový, že osa  $x_2$  směřuje opačným směrem než vektor  $\mathbf{g}$ . Ostatní osy jsou orientovány tak, že pohyb závaží probíhá v rovině  $x_1x_2$ . Počátek souřadného systému umístíme do bodu, ve kterém je lanko přivázáno ka stropu, viz obr. 1.14.

### • Počet stupňů volnosti

Soustavu tvoří jediné těleso — závaží  $m$ , které má zanedbatelné rozměry a proto ho můžeme nahradit částicí. Platí tedy, že  $N = 1$ . Závaží je vázáno na křivku, a proto se původní  $3N = 3$  stupně volnosti zredukuje na  $M = 3N - 2 = 1$ , neboť tato vazba snižuje počet stupňů volnosti mechanické soustavy o 2. Tři kartézské souřadnice závaží tedy budou jednoznačně vyjádřeny pomocí jedné zobecněné souřadnice.

### • Hledání zobecněných souřadnic

Trajektorii závaží  $m$  je oblouk kružnice poloměru  $l$  se středem v počátku souřadného systému. Tato kružnice se nachází v rovině  $x_1x_2$ , viz na obr. 1.14. Parametrické vztahy této křivky jsou proto následující:

$$x_1 = l \sin \theta, \quad x_2 = -l \cos \theta, \quad x_3 = 0,$$

kde  $\theta$  je úhel odklonu lanka od svislice a je zároveň jedinou zobecněnou souřadnicí, pomocí níž budeme popisovat polohu závaží  $m$ , jak vidíme na obr. 1.14.

Kartézské složky rychlosti získáme totální derivací příslušné kartézské souřadnice podle času:

$$\dot{x}_1 = l\dot{\theta} \cos \theta, \quad \dot{x}_2 = l\dot{\theta} \sin \theta, \quad \dot{x}_3 = 0.$$

Pro jejich kvadráty dále platí

$$\dot{x}_1^2 = l^2\dot{\theta}^2 \cos^2 \theta, \quad \dot{x}_2^2 = l^2\dot{\theta}^2 \sin^2 \theta, \quad \dot{x}_3^2 = 0.$$

### • Vyjádření Lagrangeovy funkce

Kinetická energie  $T$  této mechanické soustavy je

$$T = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} m \dot{x}_i^2 = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta + \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2.$$

Potenciální energie mechanické soustavy je

$$V = m g x_2 = -m g l \cos \theta$$

a její Lagrangeova funkce

$$L \equiv T - V = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl \cos \theta. \quad (1.135)$$

### • Sestavení pohybové rovnice

Pohybová rovnice se týká zobecněné souřadnice  $\theta$ . Parciální derivaci  $L$  podle  $\dot{\theta}$  získáme v této podobě:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta}.$$

Její totální derivace podle času je potom následující:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = ml^2\ddot{\theta}.$$

Ještě budeme potřebovat parciální derivaci Lagrangeovy funkce (1.135) podle  $\theta$ :

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgl \sin \theta.$$

Pohybová rovnice matematického kyvadla tedy je<sup>28</sup>

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \theta} \quad \Rightarrow \quad ml^2\ddot{\theta} = -mgl \sin \theta.$$

### • Řešení pohybové rovnice

Je třeba řešit získanou pohybovou rovnici, kterou přepíšeme do tvaru

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0. \quad (1.136)$$

Tato rovnice je obyčejnou diferenciální rovnicí druhého řádu s nulovou pravou stranou pro neznámou funkci  $\theta(t)$ . Vzhledem k tomu, že se  $\theta$  nachází v argumentu funkce sinus, tato rovnice je zároveň nelineární, což komplikuje postup nalezení jejího řešení. V těchto případech přistupujeme k tzv. *linearizaci* pohybové rovnice. Ta spočívá v tom, že budeme předpokládat jen „malé“ výchylky úhlu  $\theta$  odklonu lanka od svislice. Potom funkci sinus nahradíme prvním nenulovým členem jejího Taylorova rozvoje v okolí  $\theta = 0$ :

$$\sin \theta = \theta - \frac{1}{6}\theta^3 + \frac{1}{120}\theta^5 - \dots \cong \theta. \quad (1.137)$$

Pohybová rovnice (1.136) potom nabývá tvaru

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0. \quad (1.138)$$

Obdobnou rovnici jsme již řešili v předchozí úloze o harmonickém oscilátoru, viz (1.124), proto i její řešení bude obdobné (1.125):

$$\theta(t) = A \sin(\Omega t + \phi), \quad \text{kde} \quad \Omega \equiv \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (1.139)$$

<sup>28</sup>S touto rovnicí jsme se již setkali v základním kurzu mechaniky, např. v D. Halliday, R. Resnick, J. Walker: *Fyzika*. 2. vydání, VUTIUM, Brno 2013, kap. 15.

Zobecněná rychlost

$$\dot{\theta}(t) = \Omega A \cos(\Omega t + \phi) \quad (1.140)$$

zde představuje úhlovou rychlost, se kterou se závaží otáčí okolo bodu, ve kterém je lanko přivázáno ke stropu.

Integrační konstanty  $A$  a  $\phi$  se opět určí z počátečních podmínek  $\theta(0) = \theta_0$  a  $\dot{\theta}(0) = \omega_0$ . Stejně jako v předchozí úloze bychom potom postupovali při jejich hledání. Integrační konstantu  $A$  bychom našli v tomto tvaru:

$$A = \pm \sqrt{\theta_0^2 + \frac{\omega_0^2}{\Omega^2}} \quad (1.141)$$

a integrační konstantu  $\phi$  v tomto:

$$\phi = \operatorname{arccotg} \left( \frac{\omega_0}{\Omega \theta_0} \right), \quad \text{anebo} \quad \phi = \operatorname{arccotg} \left( \frac{\omega_0}{\Omega \theta_0} \right) + \pi. \quad (1.142)$$

Hodnotu  $\phi$  a znaménko konstanty  $A$  bychom nakonec opět zvolili tak, aby platily obě počáteční podmínky  $\theta(0) = \theta_0$  a  $\dot{\theta}(0) = \omega_0$ .

Grafy funkcí (1.139) a (1.140) by byly s jinými hodnotami obdobné těm, které jsme ukázali v minulé úloze o harmonickém oscilátoru, viz obr. 1.13.

### Zákony zachování

Věnujme se ještě zákonům zachování týkajících se matematického kyvadla. Lagrangeova funkce (1.135) opět explicitně nezávisí na čase, tj.

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0.$$

Integrál energie matematického kyvadla

$$h = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \dot{\theta} - L = m l^2 \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 - m g l \cos \theta = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 - m g l \cos \theta = T + V$$

je zase roven mechanické energii a rovněž je konstantní. Proto rovnice

$$\frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 - m g l \cos \theta = \text{konst} \equiv E \quad (1.143)$$

je prvním integrálem pohybové rovnice. Abychom se mohli přesvědčit o tom, že této rovnici vyhovuje řešení (1.139) zlinealizované pohybové rovnice (1.138), musíme ji rovněž „zlinealizovat“. Protože se však zde nachází úhlová rychlost  $\dot{\theta}$  v kvadrátu, je třeba funkci kosinus vyjádřit Taylorovým rozvojem v okolí  $\theta = 0$  a ponechat jej až do odpovídajícího kvadratického členu:

$$\cos \theta = 1 - \frac{1}{2} \theta^2 + \frac{1}{24} \theta^4 - \dots \cong 1 - \frac{1}{2} \theta^2.$$

Potom první integrál přepíšeme do tohoto tvaru:

$$\frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 - m g l \left( 1 - \frac{1}{2} \theta^2 \right) = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 - m g l + \frac{1}{2} m g l \theta^2 = \text{konst.} \equiv E.$$

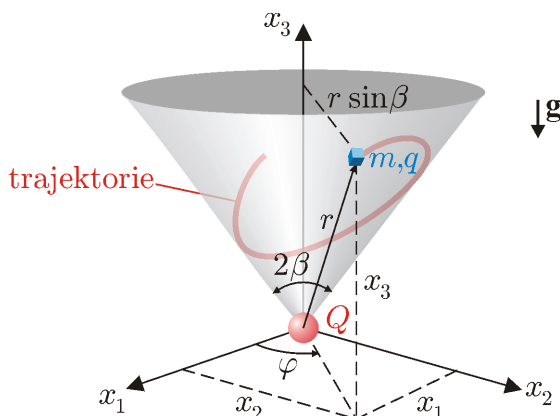
Nyní se již lze přesvědčit o tom, že řešení (1.139) skutečně vyhovuje tomuto prvnímu integrálu a přitom zjistíme, že  $E = \frac{1}{2} m g l A^2 - m g l$ .

### 1.8.3 Tělísko na kuželové ploše

Tělísko o hmotnosti  $m$  nabité nábojem  $q > 0$  může bez tření klouzat po kuželové ploše, jejíž vrcholový úhel je  $2\beta$ . Tíhové zrychlení  $\mathbf{g}$  tíhového pole Země je rovnoběžné s osou kužele, přičemž kužel se zužuje ve směru  $\mathbf{g}$ . Ve vrcholu kužele je pevně umístěná částice nabitá nábojem  $Q > 0$ . Vyšetřete vývoj pohybového stavu tělíška.

**Řešení:** Příklad v odstavci 1.5.3 na str. 25 obsahoval úvodní úvahy o této úloze, avšak tehdy jsme ještě nemohli dokončit kompletní vyšetření pohybu tělíška, neboť jsme nebyli vybaveni nástroji a postupy, které již známe.

Zvolíme kartézský souřadný systém takový, že osa  $x_3$  je rovnoběžná s osou kužele, přičemž je orientována opačně vzhledem k  $\mathbf{g}$ . Počátek souřadného systému umístíme do vrcholu kužele, viz obr. 1.15.



Obrázek 1.15: Tělísko o hmotnosti  $m$  a náboji  $q$  klouže po ploše ve tvaru kužele. Ve vrcholu kužele se nachází částice nabitá nábojem  $Q$ .

#### • Počet stupňů volnosti

Rozměry tělíška považujeme za zanedbatelné a platí tedy, že  $N = 1$ . Jelikož je tělísko vázáno k ploše, původní  $3N = 3$  stupně volnosti se zredukuje na  $M = 3N - 1 = 2$ . Tato vazba totiž snižuje počet stupňů volnosti mechanické soustavy o jeden. Dvě zobecněné souřadnice tedy budou postačovat pro jednoznačné určení polohy tělíška.

#### • Hledání zobecněných souřadnic

Parametrické vztahy kuželové plochy nalezneme užitím sférických souřadnic  $r$  a  $\varphi$ :

$$x_1 = r \cos \varphi \sin \beta, \quad x_2 = r \sin \varphi \sin \beta, \quad x_3 = r \cos \beta,$$

kde  $r$  je vzdálenost tělíška  $m$  od vrcholu kužele a úhel  $\varphi$  značí odklon průmětu průvodiče tělíška do roviny  $x_1x_2$  od osy  $x_1$ . Parametry kuželové plochy  $r$  a  $\varphi$  zde jsou zobecněnými souřadnicemi a jsou znázorněny na obr. 1.15.

Kartézské složky rychlosti tělíška opět dostaneme totální derivací příslušných kartézských souřadnic, přičemž si uvědomujeme, že úhel  $\beta$  charakterizující kuželovou plochu je konstantní na rozdíl od zobecněných souřadnic  $r$  a  $\varphi$ :

$$\dot{x}_1 = \dot{r} \cos \varphi \sin \beta - r \dot{\varphi} \sin \varphi \sin \beta, \quad \dot{x}_2 = \dot{r} \sin \varphi \sin \beta + r \dot{\varphi} \cos \varphi \sin \beta, \quad \dot{x}_3 = \dot{r} \cos \beta.$$

Jejich kvadráty potom po roznásobení dostaneme v následujících tvarech:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1^2 &= \dot{r}^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \beta - 2\dot{r}r\dot{\varphi} \cos \varphi \sin \varphi \sin^2 \beta + r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \beta, \\ \dot{x}_2^2 &= \dot{r}^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \beta + 2\dot{r}r\dot{\varphi} \sin \varphi \cos \varphi \sin^2 \beta + r^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \beta, \\ \dot{x}_3^2 &= \dot{r}^2 \cos^2 \beta.\end{aligned}$$

### • Vyjádření Lagrangeovy funkce

Kinetická energie  $T$  tělíka je

$$T = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} m \dot{x}_i^2 = \frac{1}{2} m (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \beta,$$

kde se vyrušily prostřední členy v  $\dot{x}_1^2$  a  $\dot{x}_2^2$  a kde dále platí  $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = \cos^2 \beta + \sin^2 \beta = 1$ . Potenciální energie  $V$  je tato:<sup>29</sup>

$$V = mgx_3 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} = mgr \cos \beta + \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Lagrangeovu funkci  $L$  tělíka tedy dostáváme ve tvaru

$$L \equiv T - V = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \beta - mgr \cos \beta - \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (1.144)$$

### • Sestavení pohybových rovnic

Pohybové rovnice jsou nyní dvě, přičemž první se týká zobecněné souřadnice  $r$ . Vyjádříme parciální derivaci  $L$  podle  $\dot{r}$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r},$$

jejíž totální derivace podle času je potom tato:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) = m\ddot{r}.$$

Lagrangeovu funkci (1.144) dále parciálně zderivujeme podle  $r$

$$\frac{\partial L}{\partial r} = m r \dot{\varphi}^2 \sin^2 \beta - mg \cos \beta + \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r^2},$$

přičemž první pohybová rovnice je následující:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) = \frac{\partial L}{\partial r} \quad \Rightarrow \quad m\ddot{r} = m r \dot{\varphi}^2 \sin^2 \beta - mg \cos \beta + \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Vidíme, že kromě průmětů vtištěných sil (tíhové a elektrostatické síly) do „směru“  $r$  reprezentovaných druhým a třetím členem na pravé straně pohybové rovnice se objevila ještě další

<sup>29</sup>Lze se přesvědčit o tom, že  $-\nabla_{\mathbf{r}_1} V = \mathbf{G} + \mathbf{F}_E$  je vskutku výslednicí sil působících na tělíko, přičemž  $\mathbf{G}$  je tíhová síla od Země a  $\mathbf{F}_E$  je elektrostatická síla od částice ve vrcholu kužele nabitá nábojem  $Q$ . Tvar  $V$  jsme již našli v odstavci 1.5.3, viz vztah (1.56) na str. 28.

síla:  $mr\dot{\varphi}^2 \sin^2 \beta$ . Součin  $r \sin \beta$  a  $\dot{\varphi}^2$  naznačuje, že jde o odstředivou sílu, která se objevuje, kdykoli popisujeme pohyb v rotujících neinerciálních vztažných soustavách. Jak uvidíme dále, tyto síly se „samy“ objevují při sestavování pohybových rovnic, aniž bychom se oně příliš „starali“. Budeme se s nimi setkávat, kdykoli použijeme jako zobecněné souřadnice zakřivené souřadnice, např. jako zde sférické souřadnice.

Druhá pohybová rovnice se týká zobecněné souřadnice  $\varphi$ . Tu získáme parciální derivací Lagrangeovy funkce (1.144) podle  $\dot{\varphi}$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \dot{\varphi} \sin^2 \beta,$$

kterou dále zderivujeme podle času:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) = 2mr\dot{r}\dot{\varphi} \sin^2 \beta + mr^2 \ddot{\varphi} \sin^2 \beta.$$

Parciální derivace Lagrangeovy funkce (1.144) podle  $\varphi$  je

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0,$$

takže druhá pohybová rovnice je tato:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \varphi} \quad \Rightarrow \quad 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = 0,$$

kde se vykrátí součin  $mr \sin^2 \beta$ . V této pohybové rovnici se neobjevují žádné vtištěné síly, neboť obě dvě (tíhová i elektrostatická) mají nulový průmět „do směru“ zobecněné souřadnice  $\varphi$ . Členy na levé straně pohybové rovnice tedy opět představují vliv setrvačných sil:  $2\dot{r}\dot{\varphi}$  je zřejmě Coriolisovo zrychlení a  $r\ddot{\varphi}$  Eulerovo zrychlení. Opět se oba členy objevily „samy“ pouhým postupným derivováním Lagrangeovy funkce  $L$ .

### • Řešení pohybových rovnic

Pohybové rovnice, které je třeba řešit jsou dvě:

$$m\ddot{r} = mr\dot{\varphi}^2 \sin^2 \beta - mg \cos \beta + \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = 0 \quad (1.145)$$

a reprezentují soustavu dvou obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu pro neznámé funkce  $r(t)$  a  $\varphi(t)$  popisující časový vývoj obou zobecněných souřadnic. Žádná z nich se sice nenachází v argumentu nějaké funkce, avšak v důsledku přítomnosti členu obsahujícího  $\dot{\varphi}^2$  tato soustava zůstává nelineární. Avšak linearizací zanedbáním tohoto členu tentokrát nemůžeme provést, neboť počátečními podmínkami nelze zajistit, že úhlová rychlost  $\dot{\varphi}$  tělíska vzhledem k ose kužele bude po celou dobu jeho pohybu „malá“. Zbývají nám tedy pouze zákony zachování, které nyní rozebereme.

### Zákony zachování

Zjistili jsme, že Lagrangeova funkce (1.144) explicitně nezávisí na zobecněné souřadnici  $\varphi$ , což znamená, že

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0.$$

Úhel  $\varphi$  je tedy cyklickou souřadnicí<sup>30</sup> a zobecněná hybnost

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \dot{\varphi} \sin^2 \beta$$

je konstantní. Rovnice

$$mr^2 \dot{\varphi} \sin^2 \beta = \text{konst.} \equiv p_\varphi$$

je tedy prvním integrálem pohybových rovnic, neboť obsahuje nejvýše první derivace zobecněných souřadnic. Přepíšeme-li tuto zobecněnou hybnost do tvaru  $p_\varphi = m(r \sin \beta)^2 \dot{\varphi}$ , poznáváme v ní *moment hybnosti*, protože je rovna součinu hmotnosti  $m$  tělíska, jeho vzdálenosti  $r \sin \beta$  od osy rotace na druhou a úhlové rychlosti  $\dot{\varphi}$ . Platí tedy zákon zachování momentu hybnosti, což je důsledkem toho, že žádná z vtištěných sil nemá „otáčivý účinek“.<sup>31</sup>

Dále vidíme, že Lagrangeova funkce (1.144) explicitně nezávisí ani na čase  $t$ , neboli

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0.$$

Integrál energie této mechanické soustavy (tělíska)

$$\begin{aligned} h &= \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \dot{r} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \dot{\varphi} - L = \\ &= m\dot{r}^2 + mr^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \beta - \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{1}{2}mr^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \beta + mgr \cos \beta + \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r} = \\ &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \beta + mgr \cos \beta + \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r} = T + V \end{aligned}$$

se proto rovná její mechanické energii a je konstantní. Rovnice

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \beta + mgr \cos \beta + \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r} = \text{konst.} \equiv E$$

představuje další první integrál pohybových rovnic, protože se i zde vyskytují nejvýše první derivace zobecněných souřadnic. Objevili jsme tedy celkem dva první integrály pohybových rovnic

$$mr^2 \dot{\varphi} \sin^2 \beta = p_\varphi, \quad \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \beta + mgr \cos \beta + \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r} = E, \quad (1.146)$$

kde  $p_\varphi$  a  $E$  jsou konstanty a jsou zřejmě určeny počátečními podmínkami  $r(0) = r_0$ ,  $\dot{r}(0) = v_0$ ,  $\varphi(0) = \varphi_0$  a  $\dot{\varphi}(0) = \omega_0$  takto:

$$p_\varphi = mr_0^2 \omega_0 \sin^2 \beta, \quad E = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}mr_0^2 \omega_0^2 \sin^2 \beta + mgr_0 \cos \beta + \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r_0}.$$

Z levého prvního integrálu (1.146) týkajícího se zákona zachování momentu hybnosti můžeme vyjádřit úhlovou rychlost  $\dot{\varphi}$  a dosadit do pravého prvního integrálu (1.146). Potom dostáváme rovnici

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2 \sin^2 \beta} + mgr \cos \beta + \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r} = E, \quad (1.147)$$

<sup>30</sup>Odtud vlastně název *cyklická souřadnice* plyne, neboť se často pojí s úhlovou polohou a se zákonem zachování hybnosti, jak uvidíme dále.

<sup>31</sup>Se zákonem zachování momentu hybnosti jsme setkali v základním kurzu mechaniky, viz např. D. Halliday, R. Resnick, J. Walker: *Fyzika*. vydání, VUTIUM, Brno 2013, kap. 11, odst. 11-11.



kteřá již obsahuje pouze zobecněnou souřadnici  $r$  a zobecněnou rychlost  $\dot{r}$ . Podařilo se nám tedy nalézt takovou rovnici, ve které se nenachází  $\dot{\varphi}$ . Navíc můžeme snadno vyjádřit zobecněnou rychlost  $\dot{r}$  jako funkci  $r$ :

$$\dot{r} = \pm \sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{p_{\varphi}^2}{m^2 r^2 \sin^2 \beta} - 2gr \cos \beta - \frac{qQ}{2m\pi\epsilon_0 r}}. \quad (1.148)$$

Tuto diferenciální rovnici můžeme řešit separací proměnných, neboť

$$\dot{r} \equiv \frac{dr}{dt}.$$

Vynásobíme-li rovnici (1.148)  $dt$  a vydělíme-li ji ještě odmocninou na pravé straně, dostáváme

$$dt = \pm \frac{dr}{\sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{p_{\varphi}^2}{m^2 r^2 \sin^2 \beta} - 2gr \cos \beta - \frac{qQ}{2m\pi\epsilon_0 r}}}.$$

Řešení bychom pak dostali integrací, tj.

$$t = \pm \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{p_{\varphi}^2}{m^2 r^2 \sin^2 \beta} - 2gr \cos \beta - \frac{qQ}{2m\pi\epsilon_0 r}}}. \quad (1.149)$$

Tím bychom dostali funkci  $t(r)$  se dvěma integračními konstantami  $K_1$  a  $E$ . Kdybychom mohli vyjádřit k ní inverzní funkci  $r(t)$ , její derivací bychom získali i  $\dot{r}(t)$ . Obě funkce bychom potom dosadili do levého prvního integrálu (1.146), takže bychom měli  $\dot{\varphi}(t)$  a její integraci i  $\varphi(t)$  s dvěma integračními konstantami  $K_2$  a  $p_{\varphi}$ . Tím by byla úloha zcela vyřešena.

Avšak, přestože integrál (1.149) lze nalézt, nebudeme se jím dále zabývat. Důvod spočívá v tom, že nebude potom možné snadno vyjádřit inverzní funkci  $r(t)$ .

### Metoda efektivní potenciální energie

Pohyb tělíska ale můžeme hledat i jinak. Vrátime se zpět k rovnici (1.147)

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{p_{\varphi}^2}{2mr^2 \sin^2 \beta} + mgr \cos \beta + \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r} = E. \quad (1.150)$$

Protože první člen obsahuje kvadrát zobecněné rychlosti  $\dot{r}$  a všechny ostatní členy jen zobecněnou souřadnici  $r$ , můžeme na tuto rovnici nahlížet jako na zákon zachování mechanické energie nějakého nového tělesa, které se může pohybovat pouze podél osy  $r$ . „Kinetická energie“ takového tělesa by zřejmě byla

$$T^* \equiv \frac{1}{2}m\dot{r}^2 \quad (1.151)$$

a tuto veličinu budeme nazývat *efektivní kinetická energie*. „Potenciální energie“ tohoto nového tělesa sestává ze všech ostatních členů obsahujících  $r$ :

$$V^* \equiv \frac{p_{\varphi}^2}{2mr^2 \sin^2 \beta} + mgr \cos \beta + \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad (1.152)$$

a budeme jí říkat *efektivní potenciální energie*. Protože zobecněná hybnost  $p_{\varphi}$  (moment hybnosti tělíska) je známa z počátečních podmínek, je též známa i efektivní potenciální energie  $V^*$ .

Rovněž i mechanická energie  $E$  je známa z počátečních podmínek, jak jsme již poznamenali. Podle (1.150) tedy platí

$$T^* = E - V^*(r). \quad (1.153)$$

Nyní učiníme následující úvahy: Efektivní kinetická energie  $T^*$  nikdy nemůže být záporná, neboť podle (1.151) se v ní zobecněná rychlost  $\dot{r}$  vyskytuje v kvadrátu. Pokud má vždy platit rovnice (1.153), pro danou hodnotu mechanické energie  $E$  musí být efektivní potenciální energie  $V^*(r)$  menší nebo nejvýš rovna  $E$  pro všechna  $r$ . To nám umožní graficky určit minimální hodnotu  $r_{\min}$  a maximální hodnotu  $r_{\max}$ , kterou může zobecněná souřadnice  $r$  nabývat, protože v těchto bodech je  $T^*$  právě rovna nule. Platí tedy, že

$$V^*(r_{\min}) = V^*(r_{\max}) = E.$$

Příklad takového postupu je na obr. 1.16. Efektivní kinetická energie  $T^*$  je v obecném bodě  $r$  doplněk  $V^*(r)$  do konstantní mechanické energie  $E$ , viz (1.153). Pro  $r = r_{\min}$  nebo  $r = r_{\max}$  platí, že  $T^* = 0$ . Tyto body představují body obratu a zobecněná souřadnice  $r$  nabývá hodnot pouze z intervalu  $\langle r_{\min}; r_{\max} \rangle$ .

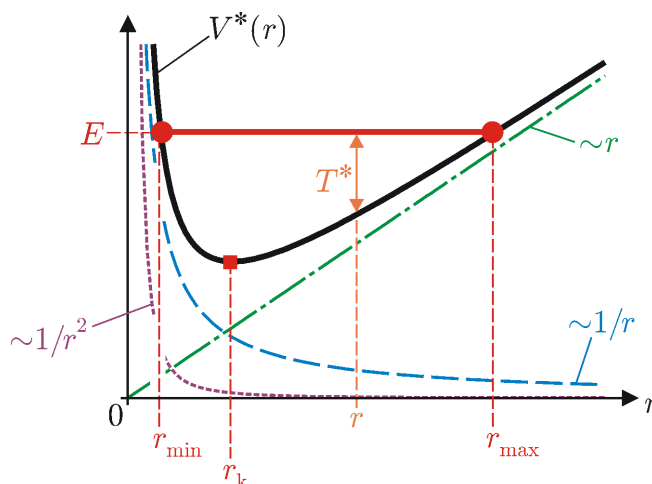
Pokud je  $E$  rovno minimu  $V^*$  v bodě  $r_k$ , potom je  $r$  po celou dobu konstantní a platí, že

$$r = r_k = \text{konst.}, \quad \dot{r} = 0.$$

V takovém případě je trajektorii tělíska kružnice o poloměru  $r_k \sin \beta$  se středem na ose kuželové plochy a úhlová rychlost je podle levého prvního integrálu (1.146) rovněž konstantní a platí

$$mr_k^2 \dot{\varphi} \sin^2 \beta = p_\varphi, \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr_k^2 \sin^2 \beta} = \text{konst.}, \quad \varphi(t) = \frac{p_\varphi}{mr_k^2 \sin^2 \beta} t + \varphi_0.$$

Obecný tvar funkcí  $r(t)$  a  $\theta(t)$  jsme tímto postupem sice úplně neurčili, avšak získali jsme důležitou kvalitatívni představu o pohybu tělíska.

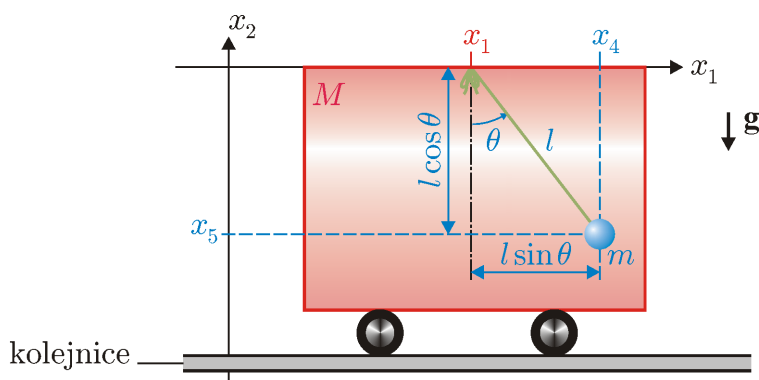


Obrázek 1.16: Příklad grafu efektivní potenciální energie  $V^*(r)$  definovanou vztahem (1.152) – černá křivka. Jsou rovněž zakresleny grafy tří funkcí, jejichž součtu je  $V^*$  rovna a které jsou úměrné pořadě  $1/r^2$ ;  $r$  a  $1/r$ .

### 1.8.4 Vozík s kyvadlem

Vozík o hmotnosti  $M$  se může pohybovat bez tření po vodorovných kolejnicích. Ve stropu vozíku je přivázáno lanko délky  $l$  na jehož druhém konci visí závaží o hmotnosti  $m$ . Na obě tělesa působí tíhové pole Země určené tíhovým zrychlením  $\mathbf{g}$  směřujícím kolmo ke kolejnicím. Závaží se může pohybovat pouze v rovině rovnoběžné s vektorem  $\mathbf{g}$  a kolejnicemi. Hmotnosti kol vozíku jsou zanedbatelné. Vyšetřete pohyb této mechanické soustavy.

**Řešení:** Zavedeme kartézskou souřadnou soustavu takovou, že osa  $x_1$  je rovnoběžná s kolejnicemi a osa  $x_2$  směřuje opačně než  $\mathbf{g}$ . Její počátek umístíme tak, aby bod zavěšení měl nulovou kartézskou souřadnici  $x_2$ , viz obr. 1.17.



Obrázek 1.17: Vozík o hmotnosti  $M$  se může pohybovat bez tření po vodorovných kolejnicích. V jeho stropu je přivázáno lanko délky  $l$ , na jehož druhém konci visí závaží o hmotnosti  $m$ .

#### • Počet stupňů volnosti

Soustava sestává ze dvou těles, které vzhledem k předpokládaným translačním pohybům můžeme považovat za částice, proto  $N = 2$ . Vozík  $M$  je vázán k přímce  $x_1$  a závaží  $m$  k oblouku kružnice se středem v bodě, který se neustále spolu s vozíkem pohybuje. Každá vazba na křivku vždy snižuje počet stupňů volnosti mechanické soustavy o 2. Původních  $3N = 6$  stupňů volnosti se tedy zredukuje na  $M = 3N - 2 - 2 = 2$ . Šest kartézských souřadnic tak bude jednoznačně vyjádřeno pomocí dvou zobecněných souřadnic.

#### • Hledání zobecněných souřadnic

Vozík  $M$  se může pohybovat pouze podél osy  $x_1$ , jeho kartézská souřadnice tedy bude první ze zobecněných souřadnic. Druhou zobecněnou souřadnicí je úhel  $\theta$  odklonu lanka od svislice, neboť tento úhel představuje parametr oblouku kružnice, po které se závaží vůči vozíku pohybuje. Kartézské souřadnice vozíku jsou tedy triviální

$$x_1 \neq 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0$$

a kartézské souřadnice závaží budou vyjádřeny pomocí zobecněných souřadnic  $x_1$  a  $\theta$  následujícími transformačními vztahy:

$$x_4 = x_1 + l \sin \theta, \quad x_5 = -l \cos \theta, \quad x_6 = 0.$$

V dalším se již budeme zabývat pouze nenulovými kartézskými souřadnicemi  $x_1$ ,  $x_4$  a  $x_5$ . Kartézské složky rychlostí jsou rovny totálním derivacím příslušných kartézských souřadnic podle času:

$$\dot{x}_1, \quad \dot{x}_4 = \dot{x}_1 + l\dot{\theta} \cos \theta, \quad \dot{x}_5 = -l\dot{\theta} \sin \theta.$$

Jejich kvadráty jsou potom zřejmě následující:

$$\dot{x}_1^2, \quad \dot{x}_4^2 = \dot{x}_1^2 + 2l\dot{x}_1\dot{\theta} \cos \theta + l^2\dot{\theta}^2 \cos^2 \theta, \quad \dot{x}_5^2 = l^2\dot{\theta}^2 \sin^2 \theta.$$

### • Vyjádření Lagrangeovy funkce

Kinetická energie  $T$  mechanické soustavy pak vyjde takto:

$$\begin{aligned} T &= \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} M \dot{x}_i^2 + \sum_{i=4}^6 \frac{1}{2} m \dot{x}_i^2 = \frac{1}{2} M \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \left( \dot{x}_1^2 + 2l\dot{x}_1\dot{\theta} \cos \theta + l^2\dot{\theta}^2 \cos^2 \theta + l^2\dot{\theta}^2 \sin^2 \theta \right) = \\ &= \frac{1}{2} (M + m) \dot{x}_1^2 + ml\dot{x}_1\dot{\theta} \cos \theta + \frac{1}{2} ml^2\dot{\theta}^2, \end{aligned}$$

potenciální energie  $V$  mechanické soustavy je zřejmě

$$V = Mgx_2 + mgx_5 = 0 - mgl \cos \theta$$

a Lagrangeova funkce  $L$  mechanické soustavy má potom tvar

$$L \equiv T - V = \frac{1}{2} (M + m) \dot{x}_1^2 + ml\dot{x}_1\dot{\theta} \cos \theta + \frac{1}{2} ml^2\dot{\theta}^2 + mgl \cos \theta. \quad (1.154)$$

### • Sestavení pohybových rovnic

Nejprve sestavíme pohybovou rovnici odpovídající zobecněné souřadnici  $x_1$ . Parciální derivaci  $L$  podle  $\dot{x}_1$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = (M + m) \dot{x}_1 + ml\dot{\theta} \cos \theta$$

zderivujeme podle času:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) = (M + m) \ddot{x}_1 + ml\ddot{\theta} \cos \theta - ml\dot{\theta}^2 \sin \theta.$$

Lagrangeovu funkci (1.154) dále ještě parciálně zderivujeme podle  $x_1$ :

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0.$$

První pohybová rovnice tedy má tvar:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) = \frac{\partial L}{\partial x_1} \quad \Rightarrow \quad (M + m) \ddot{x}_1 + ml\ddot{\theta} \cos \theta - ml\dot{\theta}^2 \sin \theta = 0.$$

Pohybovou rovnici odpovídající zobecněné souřadnici  $\theta$  získáme takto: Parciální derivaci Lagrangeovy funkce (1.154) podle  $\dot{\theta}$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml\dot{x}_1 \cos \theta + ml^2\dot{\theta}$$

opět zderivujeme podle času:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = m l \ddot{x}_1 \cos \theta - m l \dot{x}_1 \dot{\theta} \sin \theta + m l^2 \ddot{\theta}.$$

Lagrangeovu funkci (1.154) dále ještě parciálně zderivujeme podle  $\theta$ :

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -m l \dot{x}_1 \dot{\theta} \sin \theta - m g l \sin \theta.$$

Druhou pohybovou rovnici potom nalezneme ve tvaru:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \theta} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}_1 \cos \theta + l \ddot{\theta} = -g \sin \theta,$$

kde se vyrušil člen  $-m l \dot{x}_1 \dot{\theta} \sin \theta$  vyskytující se na obou stranách a vykrátit součinn  $m l$ .

### • Řešení pohybových rovnic

Máme tedy řešit pohybové rovnice

$$(M + m)\ddot{x}_1 + m l \ddot{\theta} \cos \theta - m l \dot{\theta}^2 \sin \theta = 0, \quad \ddot{x}_1 \cos \theta + l \ddot{\theta} = -g \sin \theta,$$

kteří tvoří soustavu dvou obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu pro neznámé funkce  $x_1(t)$  a  $\theta(t)$ . Nalézt řešení těchto rovnic však zatím není snadné. Brání tomu zejména fakt, že zobecněná souřadnice  $\theta$  vystupuje v argumentu goniometrických funkcí sinus a kosinus a proto jsou tyto rovnice nelineární. Jejich linearizací bychom tuto obtíž mohli odstranit. Budeme tedy předpokládat, že výchylky  $\theta$  jsou natolik „malé“, že přibližně platí

$$\sin \theta \cong \theta, \quad \cos \theta \cong 1.$$

„Malé“ hodnoty  $\theta$  však způsobí, že i  $\dot{\theta}$  a  $\ddot{\theta}$  jsou „malé“. Proto dále ještě zanedbáme člen s  $\dot{\theta}^2$ , který představuje malou veličinu vyššího řádu než veličiny s  $\theta$  nebo  $\dot{\theta}$ . Potom pohybové rovnice mají tvar

$$(M + m)\ddot{x}_1 + m l \ddot{\theta} = 0, \quad \ddot{x}_1 + l \ddot{\theta} = -g \theta. \quad (1.155)$$

Vidíme, že zůstaly pouze lineární členy obsahující zvlášť obě zobecněné souřadnice a jejich druhé derivace. Z druhé rovnice tedy můžeme vyjádřit  $\ddot{x}_1$  a dosadit do první rovnice. Potom dostáváme

$$-(M + m)(g\theta + l\ddot{\theta}) + m l \ddot{\theta} = -(M + m)g\theta - M l \ddot{\theta} = 0,$$

kteřou přepíšeme na tvar

$$\ddot{\theta} + \frac{M + m}{M} \frac{g}{l} \theta = 0.$$

Tato rovnice připomíná pohybovou rovnici „malých kmitů“ matematického kyvadla, viz vztah (1.136) v úloze 1.8.2 na str. 51, avšak nyní je zde navíc člen  $(M + m)/M$ . Jejím řešením tedy je

$$\theta(t) = A \sin(\Omega t + \phi), \quad \text{kde } \Omega \equiv \sqrt{\frac{(M + m)g}{M l}} \quad (1.156)$$

je vlastní úhlová frekvence kmitů a amplituda  $A$  a počáteční fáze  $\phi$  kmitů závaží jsou integrační konstanty, které určíme z počátečních podmínek  $\theta(0) = \theta_0$  a  $\dot{\theta}(0) = \omega_0$ . Vyjádříme-li druhou derivaci  $\theta(t)$  podle času

$$\ddot{\theta}(t) = -\Omega^2 A \sin(\Omega t + \phi),$$

a dosadíme-li ji do první ze zlinearizovaných pohybových rovnic (1.155), dostáváme

$$(M + m)\ddot{x}_1 - ml\Omega^2 A \sin(\Omega t + \phi) = 0, \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}_1 = \frac{ml}{M + m}\Omega^2 A \sin(\Omega t + \phi).$$

Nyní tuto rovnici dvakrát zintegrujeme podle času a dostáváme hledanou funkci

$$x_1(t) = -\frac{ml}{M + m}A \sin(\Omega t + \phi) + C_1 t + C_2, \quad (1.157)$$

kde  $C_1$  a  $C_2$  jsou integrační konstanty, které určíme z počátečních podmínek  $x_1(0) = x_0$  a  $\dot{x}_1(0) = v_0$ .

Funkce  $x_1(t)$  a  $\theta(t)$  znázorníme pro následující počáteční podmínky:

$$\theta(0) = 0, \quad \dot{\theta}(0) = \omega_0, \quad x_1(0) = 0, \quad \dot{x}_1(0) = 0.$$

Lze se snadno přesvědčit o tom, že potom jednotlivé integrační konstanty vycházejí takto:

$$A = \frac{\omega_0}{\Omega}, \quad \phi = 0, \quad C_1 = \frac{ml\omega_0}{M + m}, \quad C_2 = 0.$$

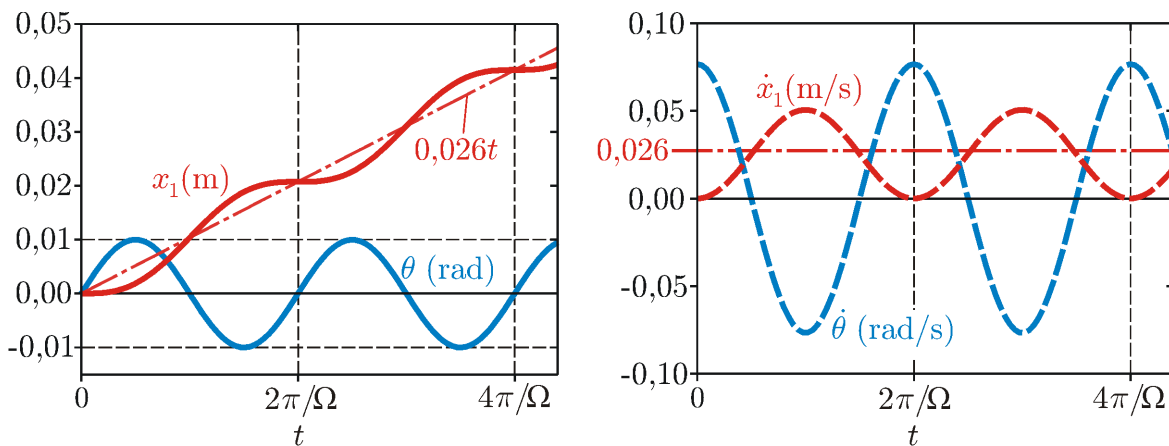
Podmínka pro „malé“ kmity závaží s amplitudou  $A$  tedy dále říká, že musí platit  $\omega_0 \ll \Omega$ . Shrneme-li výsledek, zobecněné souřadnice tedy na čase závisí následujícím způsobem:

$$x_1(t) = -\frac{ml\omega_0}{\Omega(M + m)} \sin \Omega t + \frac{ml\omega_0}{M + m} t, \quad \theta(t) = \frac{\omega_0}{\Omega} \sin \Omega t, \quad (1.158)$$

zobecněné rychlosti takto:

$$\dot{x}_1(t) = \frac{ml\omega_0}{M + m} (1 - \cos \Omega t), \quad \dot{\theta}(t) = \omega_0 \cos \Omega t. \quad (1.159)$$

Časový vývoj všech čtyř veličin je znázorněn na obr. 1.18.



Obrázek 1.18: Vlevo: Závislost zobecněných souřadnic  $x_1$  a  $\theta$  na čase podle (1.158). Vpravo: Závislost zobecněných rychlostí  $\dot{x}_1$  a  $\dot{\theta}$  na čase podle (1.159). Za konstanty byly dosazeny tyto hodnoty:  $M/m = 0,5$ ;  $l = 0,5$  m;  $\omega_0/\Omega = 0,01$ .

**Zákony zachování**

Úlohu tímto považujeme za vyřešenou. Zabývejme se však ještě tím, jaké zákony zachování zde platí. Všimli jsme si, že

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0.$$

Zobecněná souřadnice  $x_1$  je tedy cyklickou souřadnicí a proto platí zákon zachování zobecněné hybnosti

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = (M + m)\dot{x}_1 + ml\dot{\theta} \cos \theta.$$

Rovnice

$$(M + m)\dot{x}_1 + ml\dot{\theta} \cos \theta = \text{konst.} \equiv p_1$$

obsahuje již jen první derivace zobecněných souřadnic a tedy představuje první integrál pohybových rovnic. Lagrangeova funkce dále explicitně nezávisí na čase  $t$ , tj.

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0,$$

a proto integrál energie

$$\begin{aligned} h &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \dot{\theta} - L = \\ &= (M + m) \dot{x}_1^2 + 2ml\dot{x}_1\dot{\theta} \cos \theta + ml^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}(M + m) \dot{x}_1^2 - ml\dot{x}_1\dot{\theta} \cos \theta - \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl \cos \theta = \\ &= \frac{1}{2}(M + m) \dot{x}_1^2 + ml\dot{x}_1\dot{\theta} \cos \theta + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl \cos \theta = T + V \end{aligned}$$

je roven mechanické energii a je rovněž konstantní. Rovnice

$$\frac{1}{2}(M + m) \dot{x}_1^2 + ml\dot{x}_1\dot{\theta} \cos \theta + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl \cos \theta = \text{konst.} \equiv E$$

je tudíž dalším prvním integrálem pohybových rovnic. Soustavu rovnic tvořenou oběma prvními integrály

$$(M + m)\dot{x}_1 + ml\dot{\theta} \cos \theta = p_1, \quad (1.160)$$

$$\frac{1}{2}(M + m) \dot{x}_1^2 + ml\dot{x}_1\dot{\theta} \cos \theta + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl \cos \theta = E \quad (1.161)$$

však opět nelze řešit elementárními kroky, neboť  $\theta$  je zde stále argumentem goniometrických funkcí sinus a kosinus. Provedeme-li linearizaci prvního z prvních integrálů (1.160) vypovídajícího o zákonu zachování zobecněné hybnosti  $p_1$ , dostáváme

$$(M + m)\dot{x}_1 + ml\dot{\theta} = p_1.$$

Lze se přesvědčit o tom, že řešení linearizovaných pohybových rovnic (1.155), která jsou vyjádřena funkcemi (1.156) a (1.157), tj.

$$\theta(t) = A \sin(\Omega t + \phi), \quad \text{kde } \Omega \equiv \sqrt{\frac{(M + m)g}{Ml}}, \quad (1.162)$$

$$x_1(t) = -\frac{ml}{M + m} A \sin(\Omega t + \phi) + C_1 t + C_2 \quad (1.163)$$

jsou zároveň řešeními tohoto zlinearizovaného prvního integrálu, přičemž  $p_1 = (M + m)C_1$ .

Linearizaci druhého z prvních integrálů (1.161) týkajícího se zákona zachování mechanické energie  $E$  musíme provést poněkud „opatrněji“, neboť se zde vyskytují kvadráty a součiny zobecněných rychlostí. Musíme zde totiž zachovat všechny „malé“ veličiny druhého řádu, proto funkci kosinus nahradíme prvními dvěma členy jejího Taylorova rozvoje:

$$\cos \theta \cong 1 - \frac{1}{2}\theta^2, \quad (1.164)$$

a proto zlinearizovaný druhý z prvních integrálů (1.161) nabývá tvaru:

$$\frac{1}{2}(M + m)\dot{x}_1^2 + ml\dot{x}_1\dot{\theta}(1 - \frac{1}{2}\theta^2) + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl(1 - \frac{1}{2}\theta^2) = E.$$

Po roznásobení druhé a třetí závorky potom dostáváme

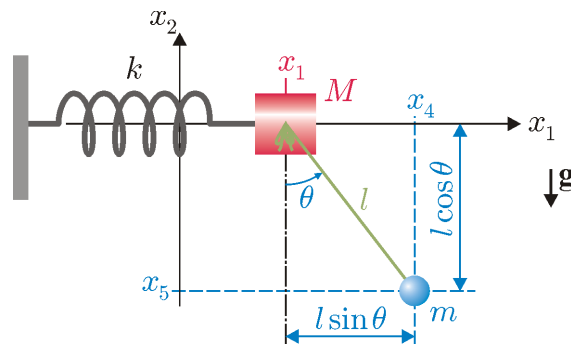
$$\frac{1}{2}(M + m)\dot{x}_1^2 + ml\dot{x}_1\dot{\theta} + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl + \frac{1}{2}mgl\theta^2 = E,$$

přičemž zanedbáváme člen  $-ml\dot{x}_1\dot{\theta}^2/2$ , neboť to je již „malý“ člen třetího řádu. Lze ukázat, že řešení (1.162) a (1.163) této rovnici vyhovují, přičemž  $E = \frac{1}{2}(M + m)C_1^2 - mgl$ .

### 1.8.5 Oscilátor s kyvadlem

Oscilátor je tvořen tělesem o hmotnosti  $M$ , které je připevněno k jednomu konci pružiny o tuhosti  $k$ . Její druhý konec je vetknut do zdi. Na tělese  $M$  je přivázáno nehmotné lanko délky  $l$ , na jehož druhém konci visí závaží o hmotnosti  $m$ . Na tuto mechanickou soustavu působí tíhová síla Země, která je určena tíhovým zrychlením  $\mathbf{g}$ . Těleso  $M$  se může pohybovat pouze ve směru osy pružiny, jež je zároveň kolmá k vektoru  $\mathbf{g}$ . Závaží  $m$  se může vzhledem k tělesu  $M$  pohybovat po oblouku kružnice o poloměru  $l$ . Jaký je pohyb této mechanické soustavy?

**Řešení:** Zvolíme takovou kartézskou souřadnou soustavu, že osa  $x_1$  je rovnoběžná s osou pružiny a osa  $x_2$  je rovnoběžná s vektorem  $\mathbf{g}$ , přičemž má opačnou orientaci. Počátek souřadné soustavy umístíme do takové polohy tělesa  $M$ , ve které není pružina zdeformována. Mechanická soustava je ukázána na obr. 1.19.



Obrázek 1.19: Těleso  $M$  je připevněno k pružině o tuhosti  $k$ . K tomuto tělesu je přivázáno lanko délky  $l$ , na jehož druhém konci visí závaží o hmotnosti  $m$ .

#### • Počet stupňů volnosti

Mechanickou soustavu tvoří dvě tělesa ( $N = 2$ ), přičemž jsou obě vázána na křivku. Soustava tedy bude mít celkem  $M = 3N - 2 - 2 = 2$  stupně volnosti odpovídající dvěma zobecněným souřadnicím.



### • Hledání zobecněných souřadnic

Zobecněné souřadnice budou zřejmě stejné, jako v předchozí úloze 1.8.4 na str. 59: kartézská souřadnice  $x_1$  tělesa  $M$  a úhel  $\theta$  odklonu lanka od svislice. Kartézské souřadnice závaží tedy budou opět vyjádřeny těmito transformačními vztahy:

$$x_4 = x_1 + l \sin \theta, \quad x_5 = -l \cos \theta, \quad x_6 = 0.$$

Totální derivací příslušné kartézské souřadnice podle času získáme kartézské složky rychlosti:

$$\dot{x}_1, \quad \dot{x}_4 = \dot{x}_1 + l\dot{\theta} \cos \theta, \quad \dot{x}_5 = -l\dot{\theta} \sin \theta$$

a jejich kvadráty ve tvaru

$$\dot{x}_1^2, \quad \dot{x}_4^2 = \dot{x}_1^2 + 2l\dot{x}_1\dot{\theta} \cos \theta + l^2\dot{\theta}^2 \cos^2 \theta, \quad \dot{x}_5^2 = l^2\dot{\theta}^2 \sin^2 \theta.$$

### • Vyjádření Lagrangeovy funkce

I kinetická energie  $T$  této mechanické soustavy zřejmě vyjde stejně jako v přechodí úloze:

$$\begin{aligned} T &= \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} M \dot{x}_i^2 + \sum_{i=4}^6 \frac{1}{2} m \dot{x}_i^2 = \frac{1}{2} M \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \left( \dot{x}_1^2 + 2l\dot{x}_1\dot{\theta} \cos \theta + l^2\dot{\theta}^2 \cos^2 \theta + l^2\dot{\theta}^2 \sin^2 \theta \right) = \\ &= \frac{1}{2} (M + m) \dot{x}_1^2 + ml\dot{x}_1\dot{\theta} \cos \theta + \frac{1}{2} ml^2\dot{\theta}^2. \end{aligned}$$

Potenciální energie  $V$  se od předchozí úlohy bude pouze lišit členem popisujícím silové působení pružiny:

$$V = \frac{1}{2} k x_1^2 - mgl \cos \theta.$$

Lagrangeova funkce  $L$  této mechanické soustavy je tedy následující:

$$L \equiv T - V = \frac{1}{2} (M + m) \dot{x}_1^2 + ml\dot{x}_1\dot{\theta} \cos \theta + \frac{1}{2} ml^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} k x_1^2 + mgl \cos \theta. \quad (1.165)$$

### • Sestavení pohybových rovnic

Pohybovou rovnicí odpovídající zobecněné souřadnici  $x_1$  získáme následovně. Nejprve vyjádříme

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = (M + m) \dot{x}_1 + ml\dot{\theta} \cos \theta,$$

odkud

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) = (M + m) \ddot{x}_1 + ml\ddot{\theta} \cos \theta - ml\dot{\theta}^2 \sin \theta.$$

A dále

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -kx_1.$$

První pohybová rovnice tedy má tvar:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) = \frac{\partial L}{\partial x_1} \quad \Rightarrow \quad (M + m) \ddot{x}_1 + ml\ddot{\theta} \cos \theta - ml\dot{\theta}^2 \sin \theta = -kx_1.$$

Pohybovou rovnici odpovídající zobecněné souřadnici  $\theta$  sestavíme obdobně. Výraz

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = m\dot{x}_1 \cos \theta + ml^2 \dot{\theta}$$

opět zderivujeme podle času:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = m\ddot{x}_1 \cos \theta - ml\dot{x}_1 \dot{\theta} \sin \theta + ml^2 \ddot{\theta}.$$

Lagrangeovu funkci (1.165) parciálně zderivujeme podle  $\theta$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -m\dot{x}_1 \dot{\theta} \sin \theta - mgl \sin \theta$$

a druhá pohybová rovnice je potom tato:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \theta} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}_1 \cos \theta + l\ddot{\theta} = -g \sin \theta.$$

### • Řešení pohybových rovnic

Sestavili jsme pohybové rovnice

$$(M + m)\ddot{x}_1 + ml\ddot{\theta} \cos \theta - ml\dot{\theta}^2 \sin \theta = -kx_1, \quad \ddot{x}_1 \cos \theta + l\ddot{\theta} = -g \sin \theta$$

ve tvaru obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu, jejichž řešeními jsou funkce  $x_1(t)$  a  $\theta(t)$ . Vzhledem k tomu, že tyto rovnice jsou opět nelineární stejně jako v předchozí úloze, provedeme jejich linearizaci tím, že budeme předpokládat „malé“ výchylky  $\theta$ , což znamená, že

$$\sin \theta \cong \theta, \quad \cos \theta \cong 1.$$

Poté, co ještě zanedbáme člen s  $\dot{\theta}^2$  představujícího malou veličinu vyššího řádu, linearizované pohybové rovnice jsou tyto:

$$(M + m)\ddot{x}_1 + ml\ddot{\theta} + kx_1 = 0, \quad \ddot{x}_1 + l\ddot{\theta} + g\theta = 0. \quad (1.166)$$

Vidíme, že zůstaly pouze lineární členy obsahující zvlášť obě zobecněné souřadnice a jejich druhé derivace, jak jsme zamýšleli. Avšak nemůžeme odstranit provázanost obou rovnic, jako jsme to učinili v předchozí úloze, neboť nyní se v první rovnici vyskytuje  $kx_1$ . Rovnice tak vždy budou obsahovat obě funkce  $x_1(t)$  a  $\theta(t)$ .

### Metoda hledání vlastních kmitů

Z charakteru pohybu mechanické soustavy předpokládáme, že obě zobecněné souřadnice  $x_1$  a  $\theta$  budou nějakým způsobem kmitat okolo rovnovážných poloh  $x_1 = 0$  a  $\theta = 0$ . Budeme tedy hledat, zda vůbec a popř. za jakých podmínek nastane situace, kdy obě souřadnice kmitají se stejnou úhlovou frekvencí  $\Omega$  a se stejnou fází  $\phi$ . Řešení pohybových rovnic (1.166) tedy předpokládáme ve tvaru

$$x_1(t) = A_1 \sin(\Omega t + \phi), \quad \theta(t) = A_2 \sin(\Omega t + \phi), \quad (1.167)$$

kde  $A_1$  a  $A_2$  jsou amplitudy kmitů a představují zde integrační konstanty. Druhé derivace těchto funkcí

$$\ddot{x}_1(t) = -\Omega^2 A_1 \sin(\Omega t + \phi), \quad \ddot{\theta}(t) = -\Omega^2 A_2 \sin(\Omega t + \phi)$$

spolu se samotnými funkcemi (1.167) dosadíme do pohybových rovnic (1.166). Poté, co vytkneme  $\sin(\Omega t + \phi)$ , dostáváme

$$[-(M + m)\Omega^2 A_1 - m\Omega^2 A_2 + kA_1] \sin(\Omega t + \phi) = 0, \quad [-\Omega^2 A_1 - l\Omega^2 A_2 + gA_2] \sin(\Omega t + \phi) = 0.$$

Aby obě rovnice platily pro libovolné  $t$ , musí být nulové obě hranaté závorky, tzn.

$$-(M + m)\Omega^2 A_1 - m\Omega^2 A_2 + kA_1 = 0, \quad -\Omega^2 A_1 - l\Omega^2 A_2 + gA_2 = 0. \quad (1.168)$$

Tyto dvě rovnice představují soustavu lineárních algebraických rovnic pro amplitudy kmitů  $A_1$  a  $A_2$ . Tato soustava je však homogenní (pravé strany jsou nulové), což znamená, že její řešení je pouze jediné:  $A_1 = A_2 = 0$ , kterému říkáme *triviální řešení*. To vede k závěru, že  $x_1(t) = \theta(t) = 0$ , a tedy, že každé z těles zůstává v klidu ve svých rovnovážných polohách. Pokud hledáme jiné řešení než triviální (předpokládáme, že nic nebrání tomu, aby se mechanická soustava pohybovala), je třeba docílit toho, aby byly rovnice (1.168) na sobě lineárně závislé. Uvidíme ale, že tímto krokem nezajistíme jen jedno netriviální řešení ale hned nekonečně mnoho. Jak ukážeme dále, to bude zcela v souladu s pohybem obou těles.

Nejprve rovnice (1.168) přepíšeme do následujícího maticového tvaru:

$$\begin{bmatrix} -(M + m)\Omega^2 + k & -m\Omega^2 \\ -\Omega^2 & -l\Omega^2 + g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (1.169)$$

Z matematického kurzu lineární algebry víme, že obě rovnice (1.168) budou lineárně závislé, pokud je determinant matice v (1.169) roven nule:

$$\det \begin{bmatrix} -(M + m)\Omega^2 + k & -m\Omega^2 \\ -\Omega^2 & -l\Omega^2 + g \end{bmatrix} = [-(M + m)\Omega^2 + k] (-l\Omega^2 + g) - m\Omega^4 = 0.$$

Po drobné úpravě této rovnice dostáváme následující kvadratickou rovnici pro kvadrát neznámé úhlové frekvence  $\Omega^2$ :

$$Ml\Omega^4 - [(M + m)g + kl]\Omega^2 + kg = 0, \quad (1.170)$$

jejíž kořeny jsou tyto:

$$\begin{aligned} \Omega_{1,2}^2 &= \frac{(M + m)g + kl}{2Ml} \pm \frac{1}{2Ml} \sqrt{[(M + m)g + kl]^2 - 4Mlkg} = \\ &= \frac{(M + m)g + kl}{2Ml} \left\{ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4Mlkg}{[(M + m)g + kl]^2}} \right\}. \end{aligned} \quad (1.171)$$

Dostáváme tedy dvě hodnoty úhlové frekvence, pro které by mohlo platit, že obě zobecněné souřadnice  $x_1$  a  $\theta$  zároveň kmitají s touto frekvencí. Odmocněním poslední rovnice dostáváme obě frekvence ve tvaru

$$\Omega_{1,2} = \sqrt{\frac{(M + m)g + kl}{2Ml}} \sqrt{1 \pm \sqrt{1 - \frac{4Mlkg}{[(M + m)g + kl]^2}}}. \quad (1.172)$$

Je však třeba prozkoumat, zda obě hodnoty úhlové frekvence nabývají reálných hodnot. Argument vnitřní odmocniny v (1.172) nesmí být záporný, a proto musí platit

$$4Mlkg \leq [(M+m)g + kl]^2 = (M+m)^2g^2 + 2(M+m)lkg + k^2l^2.$$

Tuto nerovnici dále upravíme tak, že levou stranu převedeme napravo:

$$0 \leq (M+m)^2g^2 - 2Mlkg + k^2l^2 + 2mlkg = [(M+m)g - kl]^2 + 2mlkg.$$

Protože první člen je přítomen v kvadrátu a druhý člen je vždy kladný, tato nerovnice je splněna za všech okolností. Pravá strana navíc nikdy nemůže být rovna nule pro nenulové  $M$ ,  $m$ ,  $k$  a  $l$ . Tudíž i vnitřní odmocnina v (1.172) nabývá vždy reálných hodnot. Dále je vnitřní odmocnina vždy menší než 1, protože v jejím argumentu se od jedničky odečítá číslo menší než 1. Z toho vyplývá, že i argument vnější odmocniny je vždy kladný a proto jsou obě hodnoty úhlových frekvencí  $\Omega_1$  a  $\Omega_2$  rovněž reálné. Tyto úhlové frekvence  $\Omega_1$  a  $\Omega_2$  se nazývají *charakteristické frekvence* mechanické soustavy a podle (1.172) zřejmě pro ně platí

$$\Omega_1 > \Omega_2.$$

Dosadíme-li postupně tyto hodnoty zpět do jedné z rovnic (1.168) (je lhostejné do které, neboť jsou lineárně závislé) a zvolíme-li jednu z amplitud jako parametr, např.  $A_1$ , vypočítáme druhou amplitudu jako funkci té první:

$$-(M+m)\Omega_{1,2}^2 A_1 - ml\Omega_{1,2}^2 A_2 + kA_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad A_2 = \frac{k - (M+m)\Omega_{1,2}^2}{ml\Omega_{1,2}^2} A_1. \quad (1.173)$$

Do kvadratické rovnice dosadíme oba kořeny  $\Omega_1^2$  a  $\Omega_2^2$  a upravíme ji do tohoto tvaru:

$$\frac{k - (M+m)\Omega_{1,2}^2}{ml\Omega_{1,2}^2} = \frac{k - M\Omega_{1,2}^2}{mg},$$

kde na levé straně poznáváme konstantu úmernosti mezi  $A_1$  a  $A_2$  v rovnici (1.173), která proto je

$$A_2 = \frac{k - M\Omega_{1,2}^2}{mg} A_1. \quad (1.174)$$

Je zřejmé, že čítec ve zlomku rozhoduje o tom, zda amplitudy budou mít stejná, či opačná znaménka. Kdybychom zkoumali kvadráty obou vlastních frekvencí pro různé hodnoty  $M$ ,  $m$ ,  $k$  a  $l$ , zjistili bychom, že platí následující nerovnice:

$$M\Omega_1^2 > k, \quad M\Omega_2^2 < k.$$

Tyto nerovnice spolu s (1.174) říkají, že v případě nižší charakteristické frekvence  $\Omega_2$  jsou znaménka u amplitud  $A_1$  a  $A_2$  stejná. Kmitům s touto frekvencí tedy budeme říkat *symetrické kmity* a všechny veličiny s nimi spojené budeme označovat indexem „s“. Pro symetrické kmity (s nižší vlastní frekvencí) tedy platí

$$\Omega_s^2 \equiv \Omega_2^2 = \frac{(M+m)g + kl}{2Ml} \left\{ 1 - \sqrt{1 - \frac{4Mlkg}{[(M+m)g + kl]^2}} \right\}, \quad A_{2,s} = \frac{k - M\Omega_s^2}{mg} A_{1,s}. \quad (1.175)$$

Pokud se zaměříme na vyšší vlastní frekvenci  $\Omega_1$ , znaménka u  $A_1$  a  $A_2$  vyjdou opačná. Kmity s vyšší frekvencí se proto nazývají *antisymetrické kmity* a budeme je značit indexem „a“:

$$\Omega_a^2 \equiv \Omega_1^2 = \frac{(M+m)g + kl}{2Ml} \left\{ 1 + \sqrt{1 - \frac{4Mlkg}{[(M+m)g + kl]^2}} \right\}, \quad A_{2,a} = -\frac{M\Omega_a^2 - k}{mg} A_{1,a}. \quad (1.176)$$

Symetrické a antisymetrické kmity se nazývají *vlastní kmity* mechanické soustavy a jde o tzv. *spřážené kmity*, neboť kmity jednoho tělesa ( $M$ ) jsou jednoznačně dány kmity druhého tělesa ( $m$ ).

Partikulární řešení soustavy pohybových rovnic (1.166) představují pro oba vlastní kmity následující dvojice funkcí:

$$x_{1,s}(t) = A_{1,s} \sin(\Omega_s t + \phi_s), \quad \theta_s(t) = \frac{k - M\Omega_s^2}{mg} A_{1,s} \sin(\Omega_s t + \phi_s) \quad (1.177)$$

a

$$x_{1,a}(t) = A_{1,a} \sin(\Omega_a t + \phi_a), \quad \theta_a(t) = -\frac{M\Omega_a^2 - k}{mg} A_{1,a} \sin(\Omega_a t + \phi_a). \quad (1.178)$$

Vraťme se ještě na chvíli ke kroku, jenž jsme učinili, abychom nedostali trivální řešení homogenní soustavy rovnic (1.168). Hledali jsme, za jakých okolností budou rovnice lineárně závislé (determinant příslušné matice jsme položili roven nule). Touto cestou jsme dostali charakteristické frekvence obou vlastních kmitů mechanické soustavy ( $\Omega_{1,2}$ ). Závislost rovnic (1.168) však způsobila, že jejich řešení jsme museli vypočítat tak, že jsme jednu neznámou ( $A_1$ ) prohlásili za parametr a druhou neznámou ( $A_2$ ) dopočítali. Takových řešení je zřejmě nekonečně mnoho. Toto je však pro spřážené kmity přirozené: pokud nastavíme jednu amplitudu ( $A_1$ ) kmitů jednoho tělesa ( $M$ ), již známe amplitudu ( $A_2$ ) kmitů druhého tělesa ( $m$ ). Přirozeně ale můžeme zvolit nekonečně mnoho různých hodnot amplitudy prvního tělesa.

Lineární kombinace obou vlastních kmitů (1.177) a (1.178)

$$x_1(t) = A_{1,s} \sin(\Omega_s t + \phi_s) + A_{1,a} \sin(\Omega_a t + \phi_a) \quad (1.179)$$

a

$$\theta(t) = \frac{k - M\Omega_s^2}{mg} A_{1,s} \sin(\Omega_s t + \phi_s) - \frac{M\Omega_a^2 - k}{mg} A_{1,a} \sin(\Omega_a t + \phi_a) \quad (1.180)$$

jsou nakonec obecné řešení soustavy linearizovaných pohybových rovnic (1.166). Vidíme, že obsahují celkem čtyři integrační konstanty  $A_{1,s}$ ,  $\phi_s$ ,  $A_{1,a}$  a  $\phi_a$ , které se určí ze čtyř počátečních podmínek  $x_1(0) = x_0$ ,  $\dot{x}_1(0) = v_0$ ,  $\theta(0) = \theta_0$ ,  $\dot{\theta}(0) = \omega_0$ .

Derivací funkcí (1.179) a (1.180) dostáváme závislosti obou zobecněných rychlostí na čase:

$$\dot{x}_1(t) = \Omega_s A_{1,s} \cos(\Omega_s t + \phi_s) + \Omega_a A_{1,a} \cos(\Omega_a t + \phi_a), \quad (1.181)$$

$$\dot{\theta}(t) = \frac{k - M\Omega_s^2}{mg} \Omega_s A_{1,s} \cos(\Omega_s t + \phi_s) - \frac{M\Omega_a^2 - k}{mg} \Omega_a A_{1,a} \cos(\Omega_a t + \phi_a). \quad (1.182)$$

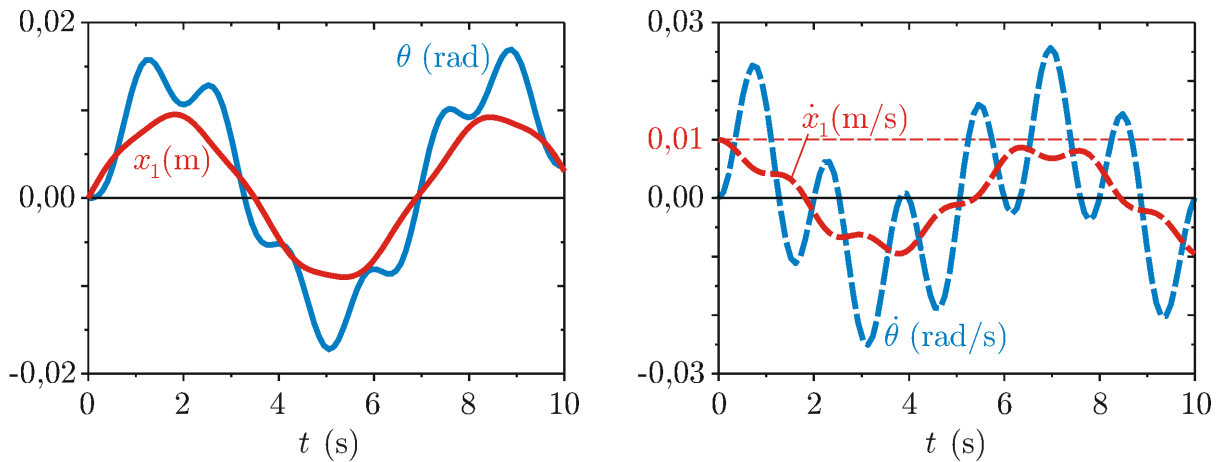
Průběh obou funkcí ukážeme na příkladu, v němž jsou počáteční podmínky následující:

$$x_1(0) = 0, \quad \dot{x}_1(0) = v_0, \quad \theta(0) = 0, \quad \dot{\theta}(0) = 0.$$

Integrační konstanty potom vyjdou takto:

$$\phi_s = \phi_a = 0, \quad A_{1,s} = \frac{v_0}{M\Omega_s} \frac{M\Omega_a^2 - k}{\Omega_a^2 - \Omega_s^2}, \quad A_{1,a} = \frac{v_0}{M\Omega_a} \frac{k - M\Omega_s^2}{\Omega_a^2 - \Omega_s^2}.$$

Na obr. 1.20 jsou ukázány časové vývoje zobecněných souřadnic  $x_1(t)$  a  $\theta(t)$  a zobecněných rychlostí  $\dot{x}_1(t)$  a  $\dot{\theta}(t)$ .



Obrázek 1.20: Vlevo: Závislost zobecněných souřadnic  $x_1$  a  $\theta$  na čase podle (1.179) a (1.180). Vpravo: Závislost zobecněných rychlostí  $\dot{x}_1$  a  $\dot{\theta}$  na čase podle (1.181) a (1.182). Za konstanty byly dosazeny tyto hodnoty:  $M = 0,5$  kg;  $m = 0,1$  kg;  $l = 1$  m;  $k = 2$  N/m;  $v_0 = 0,01$  m/s.

### Zákony zachování

Poznamenejme ještě, že Lagrangeova funkce (1.165) explicitně nezávisí na čase, tedy

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0,$$

a proto integrál energie

$$h = \frac{1}{2} (M + m) \dot{x}_1^2 + ml \dot{x}_1 \dot{\theta} \cos \theta + \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} k x_1^2 - mgl \cos \theta = T + V = \text{konst.}$$

je roven mechanické energii a je konstantní. Tento první integrál pohybových rovnic jsme však pro jejich řešení nevyužili.

### 1.8.6 Keplerova úloha

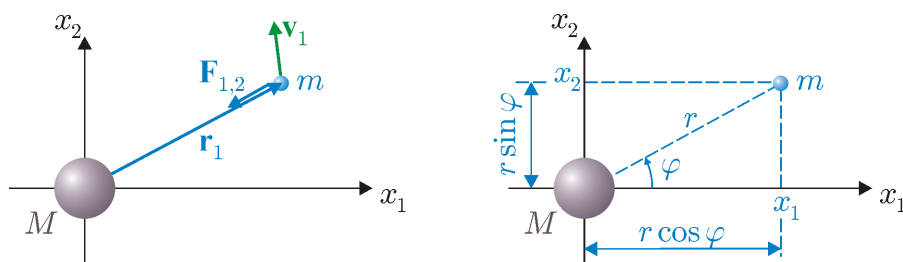
Těleso o hmotnosti  $m$  se pohybuje v blízkosti druhého tělesa o hmotnosti  $M$ , přičemž platí  $m \ll M$ . Obě tělesa na sebe působí gravitačními silami podle Newtonova gravitačního zákona. Vyšetřete pohyb tělesa  $m$ .

**Řešení:** Protože hmotnost  $M$  je významně „větší“ než hmotnost  $m$ , body trajektorie tělesa  $M$  jsou „velmi blízko“ středu hmotnosti obou těles. Budeme tedy předpokládat, že se s velmi dobrou aproximací těleso  $M$  zde nachází po celou dobu pohybu.

Počátek kartézského souřadného systému zvolíme ve středu hmotnosti obou těles, kde se zároveň nachází i těleso  $M$ . V daném okamžiku má těleso  $m$  polohový vektor  $\mathbf{r}_1$  a rychlost  $\mathbf{v}_1$ . Osy  $x_1$  a  $x_2$  dále tvoří rovinu  $x_1x_2$ , ve které leží oba vektory  $\mathbf{r}_1$  a  $\mathbf{v}_1$ . Situace je ukázána na obr. 1.21 vlevo.

#### • Počet stupňů volnosti

Mechanickou soustavu tvoří pouze jedno těleso  $m$ , tzn.  $N = 1$ , jehož poloha je dána  $3N = 3$  kartézskými souřadnicemi  $x_1$ ,  $x_2$  a  $x_3$ , které jsou zároveň složkami polohového vektoru  $\mathbf{r}_1 =$



Obrázek 1.21: Vlevo: Těleso o hmotnosti  $m$  se pohybuje v poli gravitační síly  $\mathbf{F}_{1,2}$ , kterou na něj působí těleso  $M$ , přičemž  $M \gg m$ . Těleso  $M$  se nachází v počátku soustavy souřadné, těleso  $m$  má v daném okamžiku polohový vektor  $\mathbf{r}_1$  a rychlost  $\mathbf{v}_1$ , které se nacházejí v rovině  $x_1x_2$ . Vpravo: Geometrický význam zobecněných souřadnic  $r$  a  $\varphi$ .

$(x_1, x_2, x_3)$ . Na toto těleso v každém okamžiku působí gravitační síla podle Newtonova gravitačního zákona<sup>32</sup>

$$\mathbf{F}_{1,2} = -G \frac{mM}{|\mathbf{r}_1|^3} \mathbf{r}_1, \quad (1.183)$$

kde  $G \doteq 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2}$  je gravitační konstanta. Gravitační síla působící na těleso  $m$  tedy neustále směřuje v opačném směru vzhledem k vektoru  $\mathbf{r}_1$ . Trajektorie tělesa  $m$  proto bude rovinná křivka, jejíž všechny body náležejí rovině určené jeho polohovým vektorem  $\mathbf{r}_1$  a vektorem rychlosti  $\mathbf{v}_1$  totožné s rovinou  $x_1x_2$ . Pohyb tělesa  $m$  v rovině znamená, že mechanická soustava bude mít celkem  $M = 3N - 1 = 2$  stupně volnosti, což odpovídá dvěma zobecněným souřadnicím.

### • Hledání zobecněných souřadnic

Vzhledem k charakteru gravitační síly (1.183) zvolíme následující dvě zobecněné souřadnice: vzdálenost  $r$  od středu souřadného systému a úhel  $\varphi$  odklonu průvodiče od osy  $x_1$ , viz obr. 1.21 vpravo. Kartézské souřadnice tělesa  $m$  tedy budou vyjádřeny těmito transformačními vztahy:

$$x_1 = r \cos \varphi, \quad x_2 = r \sin \varphi, \quad x_3 = 0.$$

Příslušné kartézské složky rychlostí jsou potom následující:

$$\dot{x}_1 = \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi, \quad \dot{x}_2 = \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi, \quad \dot{x}_3 = 0,$$

přičemž jejich kvadráty jsou tyto:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1^2 &= \dot{r}^2 \cos^2 \varphi - \dot{r} r \dot{\varphi} \cos \varphi \sin \varphi + r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi, \\ \dot{x}_2^2 &= \dot{r}^2 \sin^2 \varphi + \dot{r} r \dot{\varphi} \cos \varphi \sin \varphi + r^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2 \varphi, \\ \dot{x}_3^2 &= 0. \end{aligned}$$

<sup>32</sup>Vyjádření gravitační síly v uvedeném tvaru jsme již rozebrali v příkladu 1.2, viz vztah (1.20) na str. 16, kde bychom dosadili  $\mathbf{r}_2 = \mathbf{0}$ , neboť se těleso  $M$  neustále nachází v počátku souřadného systému.

### • Vyjádření Lagrangeovy funkce

Kinetická energie  $T$  mechanické soustavy (tělesa  $m$ ) vyjde ve tvaru

$$T = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} m \dot{x}_i^2 = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\varphi}^2,$$

kde se vyrušily prostřední členy v  $\dot{x}_1^2$  a  $\dot{x}_2^2$ . Potenciální energii  $V$  vyjádříme takto<sup>33</sup>

$$V = -G \frac{mM}{|\mathbf{r}_1|} = -G \frac{mM}{r}.$$

Lagrangeova funkce  $L$  této mechanické soustavy (tělesa  $m$ ) potom je

$$L \equiv T - V = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\varphi}^2 + G \frac{mM}{r}. \quad (1.184)$$

### • Sestavení pohybových rovnic

Pohybovou rovnicí odpovídající zobecněné souřadnici  $r$  sestavíme obvyklým způsobem. Nejprve

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m \dot{r},$$

a dále

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) = m \ddot{r}.$$

Pravou stranu této pohybové rovnice získáme takto:

$$\frac{\partial L}{\partial r} = m r \dot{\varphi}^2 - G \frac{mM}{r^2}.$$

Potom první pohybová rovnice má tvar:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) = \frac{\partial L}{\partial r} \quad \Rightarrow \quad \ddot{r} = r \dot{\varphi}^2 - G \frac{M}{r^2},$$

kde se vykrátí hmotnost  $m$ .

Pohybovou rovnicí odpovídající zobecněné souřadnici  $\varphi$  získáme v této podobě. Začneme s výrazem

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \dot{\varphi},$$

který zderivujeme podle času:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) = 2 m r \dot{r} \dot{\varphi} + m r^2 \ddot{\varphi}.$$

Dále Lagrangeovu funkci (1.184) parciálně zderivujeme podle  $\varphi$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0.$$

<sup>33</sup>Viz příklad 1.2, vztah (1.19) na str. 15, přičemž  $\mathbf{r}_2 = \mathbf{0}$ .



Druhá pohybová rovnice je potom následující:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \varphi} \quad \Rightarrow \quad 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = 0,$$

kde se vykrátí součin  $mr$ .

### • Řešení pohybových rovnic

Pohybové rovnice

$$\ddot{r} = r\dot{\varphi}^2 - G\frac{M}{r^2}, \quad \dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = 0$$

tvorí soustavu obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu, jejichž řešeními jsou funkce  $r(t)$  a  $\varphi(t)$ .

### • Zákony zachování

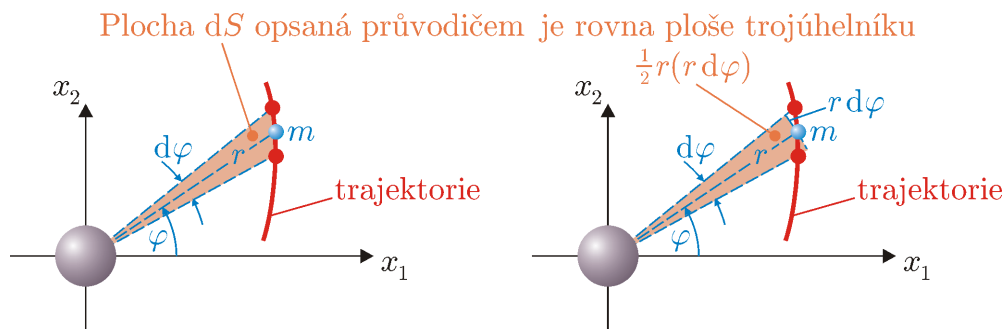
Lagrangeova funkce (1.165) explicitně nezávisí na zobecněné souřadnici  $\varphi$ , neboli

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0,$$

a proto se zobecněná hybnost

$$p_{\varphi} \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} = \text{konst.} \quad (1.185)$$

zachovává a tato rovnice je tedy prvním integrálem pohybových rovnic. Zobecněná souřadnice  $\varphi$  je tudíž cyklickou souřadnicí.



Obrázek 1.22: Vlevo: Infinitesimální plocha  $dS$  opsaná průvodičem při změně zobecněné souřadnice  $d\varphi$ . Vpravo: Stejná plocha  $dS$  je rovna ploše  $\frac{1}{2}r(r d\varphi)$  naznačeného trojúhelníku.

Podle obr. 1.22 vpravo je infinitesimální plocha, kterou průvodič opíše při změně úhlu  $\varphi$  o  $d\varphi$  při okamžité vzdálenosti  $r$  tělesa  $m$  od počátku souřadného systému, dána vztahem

$$dS = \frac{1}{2}r(r d\varphi) = \frac{1}{2}r^2 d\varphi.$$

Vydělením této rovnice  $dt$  a užitím (1.185) pak dostáváme

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi} = \frac{p_{\varphi}}{2m} = \text{konst.}$$

Tento výsledek říká, že plocha opsaná průvodičem za jednotku času je konstantní bez ohledu na okamžitou hodnotu  $r$  nebo  $\varphi$ . S tímto výsledkem jsme se již setkali v základním kurzu mechaniky a je vyjádřením 2. Keplerova zákona (zákona ploch).<sup>34</sup>

Dále ještě Lagrangeova funkce (1.165) explicitně nezávisí na čase  $t$ :

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0.$$

Integrál energie

$$h \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \dot{r} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \dot{\varphi} - L = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\varphi}^2 - G \frac{mM}{r} = T + V \equiv E = \text{konst.} \quad (1.186)$$

je roven mechanické energii tělesa  $m$  a ta se rovněž zachovává. Jde proto o další první integrál pohybových rovnic. Podobně jako v úloze 1.8.3 o tělísku klouzajícím po kuželové ploše, viz krok „Řešení pohybových rovnic“ od str. 55, využijeme obou prvních integrálů ke kvalitativnímu popisu pohybu.

### Metoda efektivní potenciální energie

Z prvního integrálu (1.185) vyjádříme zobecněnou rychlost

$$\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2} \quad (1.187)$$

a dosadíme ji do prvního integrálu (1.186):

$$\frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} - G \frac{mM}{r} = E. \quad (1.188)$$

Tato rovnice vyjadřuje zákon zachování mechanické energie nějakého nového tělesa, které se pohybuje pouze podél osy  $r$ , přičemž jehož efektivní kinetická energie je

$$T^* \equiv \frac{1}{2} m \dot{r}^2 \quad (1.189)$$

a jeho efektivní potenciální energie je rovna součtu obou zbývajících členů obsahujících  $r$ :

$$V^* \equiv \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} - G \frac{mM}{r}, \quad (1.190)$$

a platí

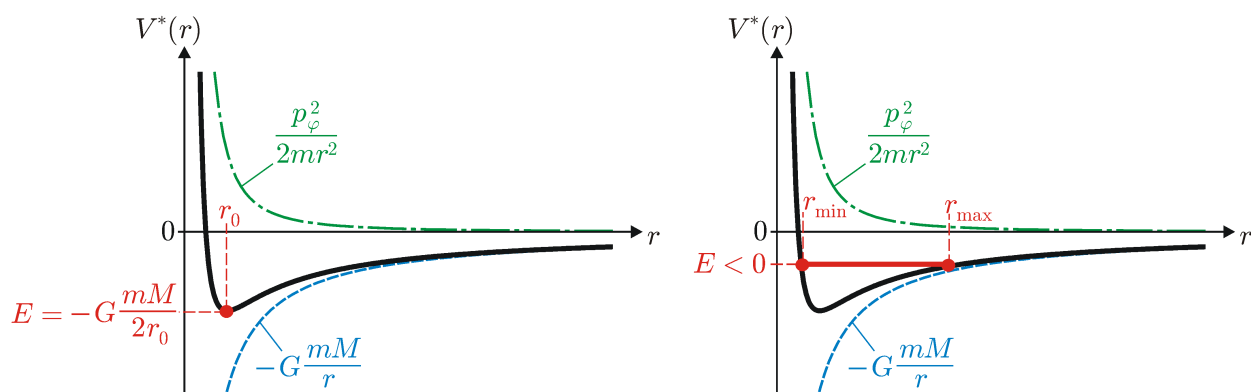
$$E = T^* + V^*. \quad (1.191)$$

Zobecněnou hybnost  $p_\varphi$  známe z počátečních podmínek a tudíž známe i efektivní potenciální energii  $V^*$ . Její graf je ukázán na obr. 1.23.

Je zřejmé, že  $E \geq V^*$ , neboť (efektivní) kinetická energie nemůže být záporná. Pokud  $E = V^*$ , potom  $T^* = 0$ . V tomto okamžiku je zobecněná rychlost  $\dot{r}$  nulová a těleso  $m$  vůči tělesu  $M$  nemění vzdálenost, kterou označíme  $r_m$ . Tyto situace budeme v dalším zkoumat:

$$E = V^*(r_m) = \frac{p_\varphi^2}{2mr_m^2} - G \frac{mM}{r_m} \quad \Rightarrow \quad Er_m^2 + GmMr_m - \frac{p_\varphi^2}{2m} = 0. \quad (1.192)$$

<sup>34</sup>Viz např. D. Halliday, R. Resnick, J. Walker: *Fyzika*. 2. vydání, VUTIUM, Brno 2013, kap. 13, odst. 13-7.



Obrázek 1.23: Graf efektivní potenciální energie  $V^*(r)$  definované vztahem (1.190) – černá křivka. Vlevo: Mechanická energie  $E$  je rovna minimu  $V^*(r)$  pro  $r = r_0$ . Vpravo: Mechanická energie  $E$  je záporná (ale vyšší, než minimum  $V^*(r)$ ).

Řešíme tedy kvadratickou rovnici, jejíž kořeny  $r_m$  jsou

$$\begin{aligned} r_m &= -\frac{GmM}{2E} \pm \frac{1}{2E} \sqrt{(GmM)^2 + \frac{2Ep_\varphi^2}{m}} = -\frac{GmM}{2E} \pm \frac{GmM}{2E} \sqrt{1 + \frac{2mEp_\varphi^2}{(Gm^2M)^2}} = \\ &= \frac{GmM}{2E} \left( -1 \pm \sqrt{1 + \frac{2mEp_\varphi^2}{(Gm^2M)^2}} \right). \end{aligned} \quad (1.193)$$

Existence pouze jediného kořene bude zajištěna tehdy, když argument odmocniny bude nulový, neboli

$$E = -\frac{(Gm^2M)^2}{2mp_\varphi^2}.$$

Jednonásobný kořen kvadratické rovnice (1.192) potom podle (1.193) vyjde

$$r_m \equiv r_0 = -\frac{GmM}{2E} = \frac{p_\varphi^2}{Gm^2M} \quad (1.194)$$

a mechanickou energii nalézáme ve tvaru

$$E = -G\frac{mM}{2r_0}. \quad (1.195)$$

Tato situace odpovídá případu, kdy  $E$  je rovna minimu efektivní potenciální energie, viz obr. 1.23 vlevo:

$$\left. \frac{dV^*}{dr} \right|_{r=r_0} = -\frac{p_\varphi^2}{mr_0^3} + G\frac{mM}{r_0^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad r_0 = \frac{p_\varphi^2}{Gm^2M},$$

přičemž hodnota efektivní potenciální energie v tomto minimu je

$$V^*(r_0) = \frac{p_\varphi^2}{2mr_0^2} - G\frac{mM}{r_0} = -G\frac{mM}{2r_0}.$$

Znamená to, že v takovém případě je  $T^* = 0$  po celou pohybu a tudíž vzdálenost  $r_0$  tělesa  $m$  od tělesa  $M$  je konstantní. Trajektorie tělesa  $m$  je proto kružnice o poloměru  $r_0$ .

Jestliže mechanická energie nabývá hodnot

$$-\frac{(GM)^2 m^3}{2p_\varphi^2} < E < 0,$$

kvadratická rovnice (1.192) má podle (1.193) následující dva kořeny:

$$r_{\min} = \frac{GmM}{2E} \left( -1 + \sqrt{1 + \frac{2mEp_\varphi^2}{(Gm^2M)^2}} \right),$$

$$r_{\max} = \frac{GmM}{2E} \left( -1 - \sqrt{1 + \frac{2mEp_\varphi^2}{(Gm^2M)^2}} \right).$$

Oba vztahy dále rozšíříme následujícím způsobem:

$$r_{\min} = \frac{GmM}{2E} \left( -1 + \sqrt{1 + \frac{2mEp_\varphi^2}{(Gm^2M)^2}} \right) \frac{1 + \sqrt{1 + 2mEp_\varphi^2/(Gm^2M)^2}}{1 + \sqrt{1 + 2mEp_\varphi^2/(Gm^2M)^2}} =$$

$$= \frac{p_\varphi^2/(Gm^2M)}{1 + \sqrt{1 + 2mEp_\varphi^2/(Gm^2M)^2}}, \quad (1.196)$$

$$r_{\max} = \frac{GmM}{2E} \left( -1 - \sqrt{1 + \frac{2mEp_\varphi^2}{(Gm^2M)^2}} \right) \frac{1 - \sqrt{1 + 2mEp_\varphi^2/(Gm^2M)^2}}{1 - \sqrt{1 + 2mEp_\varphi^2/(Gm^2M)^2}} =$$

$$= \frac{p_\varphi^2/(Gm^2M)}{1 - \sqrt{1 + 2mEp_\varphi^2/(Gm^2M)^2}}. \quad (1.197)$$

Hodnota  $r_{\min}$  zřejmě představuje nejmenší vzdálenost tělesa  $m$  od tělesa  $M$ , zatímco  $r_{\max}$  vzdálenost, kdy těleso  $m$  je od tělesa  $M$  nejdále, viz obr. 1.23 vpravo.

Zajímavý případ nastane, když  $E = 0$ . Kvadratická rovnice (1.192) nyní nabývá tvaru

$$GmMr_m - \frac{p_\varphi^2}{2m} = 0,$$

odkud

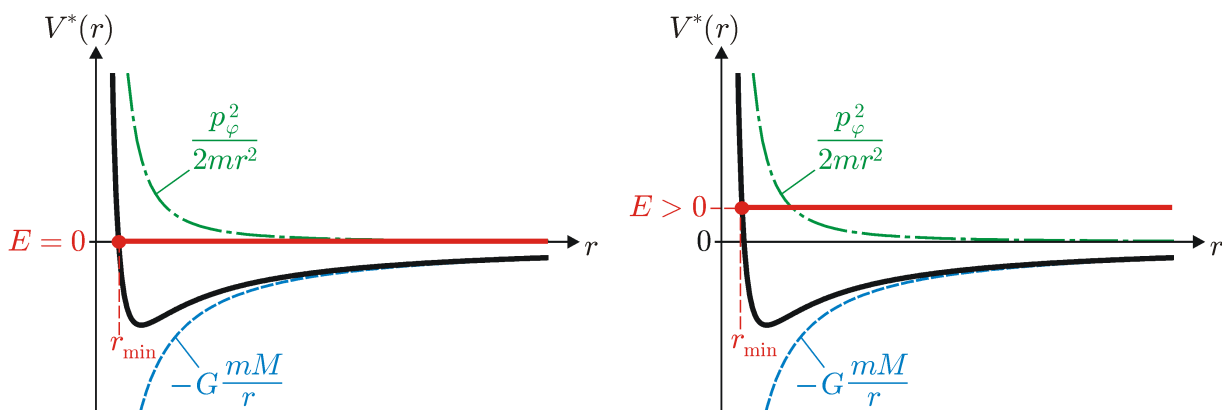
$$r_m \equiv r_{\min} = \frac{p_\varphi^2}{2Gm^2M}. \quad (1.198)$$

Tato hodnota říká, do jaké nejmenší vzdálenosti se v tomto případě těleso  $m$  přiblíží k tělesu  $M$ . Naproti tomu neexistuje omezení maximální vzdálenosti obou těles. Tento případ je ukázán na viz obr. 1.24 vlevo.

Nakonec krátce prodiskutujeme situaci, kdy  $E > 0$ . V takovém případě podle (1.197)  $r_{\max}$  nabývá záporných hodnot. Protože obecně platí  $r \geq 0$ , znamená to, že maximální vzdálenost tělesa  $m$  od tělesa  $M$  opět není omezena. Naopak minimální vzdálenost  $r_{\min}$  popsaná vztahem (1.196), tj.

$$r_{\min} = \frac{p_\varphi^2/(Gm^2M)}{1 + \sqrt{1 + 2mEp_\varphi^2/(Gm^2M)^2}}, \quad (1.199)$$

je stále kladná a tudíž existuje, viz obr. 1.24 vpravo.



Obrázek 1.24: Graf efektivní potenciální energie  $V^*(r)$  definované vztahem (1.190) – černá křivka. Vlevo: Mechanická energie  $E$  je nulová. Vpravo: Mechanická energie  $E$  je kladná.

### • Hledání rovnice trajektorie

Následující postup bude sledovat kroky, které jsme již procházeli v úloze 1.8.3 o tělísku klouzajícím po kuželové ploše, viz krok „Řešení pohybových rovnic“ od str. 55. Tam jsme ještě výpočet nedopočítávali do konce, ale úlohu jsme řešili kvalitativně pomocí grafu efektivní potenciální energie podobně, jako v předešlém textu. Nyní se však budeme věnovat kompletnímu integrování prvních integrálů (1.185) a (1.186). Podle (1.187) platí

$$\dot{\varphi} \equiv \frac{d\varphi}{dt} = \frac{p_\varphi}{mr^2}. \quad (1.200)$$

Ze vztahu (1.188) pro mechanickou energii

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} - G\frac{mM}{r} = E$$

vyjádříme zobecněnou rychlost

$$\dot{r} \equiv \frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{p_\varphi^2}{m^2r^2} + \frac{2GM}{r}}. \quad (1.201)$$

Vydělením rovnic (1.200) a (1.201) dále dostáváme

$$\frac{d\varphi/dt}{dr/dt} = \frac{d\varphi}{dr} = \pm \frac{p_\varphi}{mr^2 \sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{p_\varphi^2}{m^2r^2} + \frac{2GM}{r}}} = \pm \frac{1}{r^2 \sqrt{\frac{2mE}{p_\varphi^2} - \frac{1}{r^2} + \frac{2GMm^2}{p_\varphi^2 r}}}. \quad (1.202)$$

Vidíme, že jsme vyloučili čas  $t$  a zůstává pouze vzájemná závislost obou zobecněných souřadnic  $r$  a  $\varphi$ . Znamená to, že směřujeme k vyjádření rovnice trajektorie tělesa  $m$ .

Integrací rovnice (1.202) prozatím získáme závislost  $\varphi(r)$ . Nejprve zavedeme substituci  $u \equiv 1/r$ , přičemž pro diferenciály platí  $du = -dr/r^2$ . Potom

$$\varphi(r) = \pm \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{2mE}{p_\varphi^2} - \frac{1}{r^2} + \frac{2GMm^2}{p_\varphi^2 r}}} = \mp \int \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{p_\varphi^2} - u^2 + \frac{2GMm^2}{p_\varphi^2} u}}.$$

V argumentu odmocniny odečteme a přičteme výraz  $(GMm^2/p_\varphi^2)^2$ :

$$\begin{aligned}\varphi(r) &= \mp \int \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{p_\varphi^2} - u^2 + \frac{2GMm^2}{p_\varphi^2}u - \left(\frac{GMm^2}{p_\varphi^2}\right)^2 + \left(\frac{GMm^2}{p_\varphi^2}\right)^2}} = \\ &= \mp \int \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{p_\varphi^2} - \left(u - \frac{GMm^2}{p_\varphi^2}\right)^2 + \left(\frac{GMm^2}{p_\varphi^2}\right)^2}} = \\ &= \mp \int \frac{du}{\sqrt{K^2 - \left(u - \frac{GMm^2}{p_\varphi^2}\right)^2}},\end{aligned}$$

kde jsme zavedli konstantu

$$K \equiv \sqrt{\frac{2mE}{p_\varphi^2} + \left(\frac{GMm^2}{p_\varphi^2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2mEp_\varphi^2 + (GMm^2)^2}}{p_\varphi^2}.$$

Dále použijeme další substituci  $s \equiv (u - GMm^2/p_\varphi^2)/K$ , jejíž diferenciál zřejmě vychází takto:  $ds = du/K$ . Funkci  $\varphi(r)$  potom nalezneme v tomto tvaru

$$\varphi(r) = \mp \int \frac{K ds}{\sqrt{K^2 - K^2 s^2}} = \mp \int \frac{ds}{\sqrt{1 - s^2}} = \pm \arccos s + \varphi_1,$$

kde  $\varphi_1$  je integrační konstanta. Po zpětném dosazení za obě substituce  $s$  a  $u$  a dále za konstantu  $K$  dostáváme

$$\varphi(r) = \pm \arccos \left[ \frac{p_\varphi^2/r - GMm^2}{\sqrt{2mEp_\varphi^2 + (GMm^2)^2}} \right] + \varphi_1.$$

Inverzní závislost  $r(\varphi)$  již snadno dostaneme následujícím způsobem. Nejprve

$$\cos[\mp(\varphi - \varphi_1)] = \frac{p_\varphi^2/r - GMm^2}{\sqrt{2mEp_\varphi^2 + (GMm^2)^2}} = \left( \frac{p_\varphi^2}{GMm^2 r} - 1 \right) \frac{1}{\sqrt{2mEp_\varphi^2 / (GMm^2)^2 + 1}},$$

přičemž můžeme vynechat znaménka  $\mp$ , neboť funkce kosinus je sudou funkcí. Potom

$$r(\varphi) = \frac{p_\varphi^2 / (GMm^2)}{1 + \cos(\varphi - \varphi_1) \sqrt{2mEp_\varphi^2 / (GMm^2)^2 + 1}} = \frac{r^*}{1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_1)}, \quad (1.203)$$

kde jsme zavedli dvě nové konstanty

$$r^* \equiv \frac{p_\varphi^2}{GMm^2}, \quad \varepsilon \equiv \sqrt{\frac{2mEp_\varphi^2}{(GMm^2)^2} + 1}. \quad (1.204)$$

Funkce (1.203) vyjadřuje rovnici trajektorie tělesa  $m$  v polárních souřadnicích  $(r, \varphi)$ . Jejím tvarem je kuželosečka (kružnice, elipsa, parabola nebo hyperbola), přičemž konstanta  $r^*$  se

nazývá parametr a konstanta  $\varepsilon$  excentricita kuželosečky. Skutečnost, že trajektorií tělesa pohybujícího se v poli gravitační síly je některá z kuželoseček, vyjadřuje obecná formulace 1. Keplerova zákona (zákona oběžných drah).<sup>35</sup>

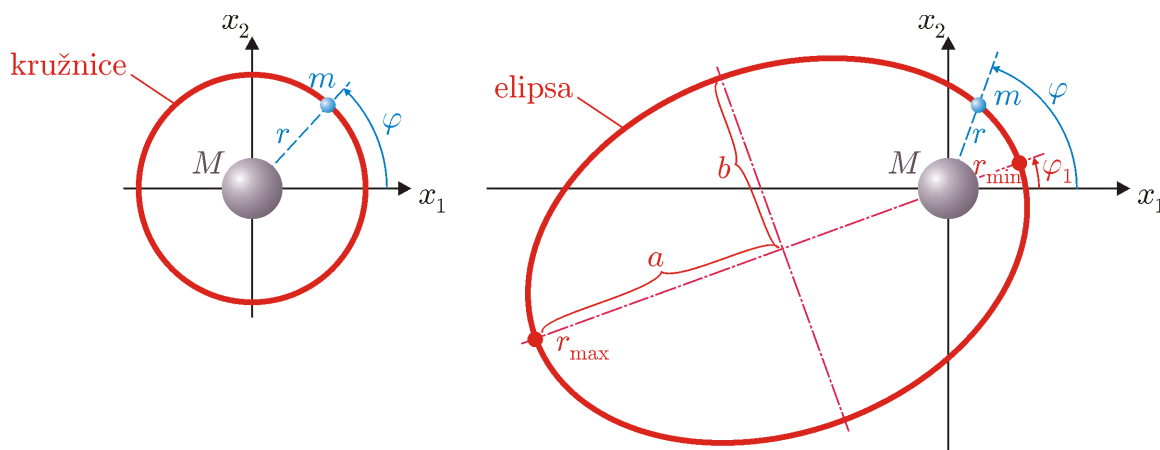
Probereme možné hodnoty excentricity  $\varepsilon$  kuželosečky. Připomínáme, že zobecněná hybnost  $p_\varphi$  i mechanická energie  $E$  jsou konstantní a jejich hodnoty určují počáteční podmínky:

$$r(0) = r_0, \quad \dot{r}(0) = v_0, \quad \varphi(0) = \varphi_0, \quad \dot{\varphi}(0) = \omega_0.$$

Odtud za pomoci prvních integrálů (1.185) a (1.186) dostáváme jejich hodnoty:

$$p_\varphi = mr_0^2\omega_0, \quad E = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}mr_0^2\omega_0^2 - G\frac{mM}{r_0}.$$

### Kružnice



Obrázek 1.25: Vlevo: Trajektorie tělesa  $m$  je kružnice. Vpravo: Trajektorie tělesa  $m$  je elipsa.

V případě, že  $\varepsilon = 0$ , funkce (1.203) vychází takto:

$$r(\varphi) = r_0 = r^* = \text{konst.}$$

Znamená to, že vzdálenost  $r$  tělesa  $m$  od počátku souřadného systému není závislá na  $\varphi$ , je po celou dobu rovna počáteční vzdálenosti  $r_0$  a tudíž je konstantní. Taková křivka se nazývá kružnice a podle první z rovnic (1.204) je její poloměr

$$r_0 = \frac{p_\varphi^2}{GMm^2} = \frac{r_0^4\omega_0^2}{GM} \Rightarrow r_0^3\omega_0^2 = GM, \quad (1.205)$$

což je jiným vyjádřením 3. Keplerova zákona (zákona oběžných dob), jak jej známe ze základního kurzu mechaniky.<sup>36</sup> Pro mechanickou energii  $E$  zde platí:

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{2mEp_\varphi^2}{(GMm^2)^2} + 1} = 0 \Rightarrow E = -\frac{(GM)^2 m^3}{2p_\varphi^2} = -\frac{(GM)^2 m}{2r_0^4\omega_0^2}. \quad (1.206)$$

<sup>35</sup>Viz např. D. Halliday, R. Resnick, J. Walker: *Fyzika*. 2. vydání, VUTIUM, Brno 2013, kap. 13, odst. 13-7.

<sup>36</sup>Viz např. D. Halliday, R. Resnick, J. Walker: *Fyzika*. vydání, VUTIUM, Brno 2013, kap. 13, odst. 13-7.

Užitím (1.205) nakonec získáváme mechanickou energii pro pohyb po kružnici ve tvaru

$$E = -\frac{GMm}{2r_0},$$

který opět známe ze základního kurzu mechaniky.<sup>37</sup> Trajektorie tělesa  $m$  pro tento případ je ukázána na obr. 1.25 vlevo. Vztahy pro poloměr kružnice  $r_0$  a mechanickou energii  $E$  jsme již obdrželi při kvalitativním řešení úlohy pomocí efektivní potenciální energie, viz (1.194) a (1.195).

## Elipsa

Budeme se zabývat případem, kdy  $0 < \varepsilon < 1$ . Pro mechanickou energii v takovém případě podle druhého vztahu (1.204) platí

$$-\frac{(GM)^2 m^3}{2p_\varphi^2} < E < 0. \quad (1.207)$$

Podle (1.203) je funkce  $r(\varphi)$  periodickou funkcí s periodou  $2\pi$ , přičemž nejmenší její hodnota hodnota podle (1.203) nastává, když

$$\varphi - \varphi_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{\min} = \frac{r^*}{1 + \varepsilon} = \frac{p_\varphi^2 / (GMm^2)}{1 + \sqrt{2mEp_\varphi^2 / (GMm^2)^2 + 1}} \quad (1.208)$$

a největší, když

$$\varphi - \varphi_1 = \pi \quad \Rightarrow \quad r_{\max} = \frac{r^*}{1 - \varepsilon} = \frac{p_\varphi^2 / (GMm^2)}{1 - \sqrt{2mEp_\varphi^2 / (GMm^2)^2 + 1}}. \quad (1.209)$$

Oba vztahy jsme odvodili již při řešení úlohy pomocí efektivní potenciální energie, viz (1.196) a (1.197). Tehdy jsme však ještě nemohli určit trajektorii tělesa  $m$ . Nyní vidíme, že křivka trajektorie je elipsa s delší poloosou

$$a = \frac{r^*}{1 - \varepsilon^2} = -\frac{p_\varphi^2 / (GMm^2)}{2mEp_\varphi^2 / (GMm^2)^2} = -\frac{GMm}{2E}$$

a kratší poloosou

$$b = \frac{r^*}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} = \frac{p_\varphi^2 / (GMm^2)}{\sqrt{-2mEp_\varphi^2 / (GMm^2)^2}} = \frac{p_\varphi}{\sqrt{-2mE}}.$$

Eliptická trajektorie tělesa  $m$  se všemi uvedenými charakteristikami je znázorněna na obr. 1.25 vpravo.

<sup>37</sup>Viz např. D. Halliday, R. Resnick, J. Walker: *Fyzika*. vydání, VUTIUM, Brno 2013, kap. 13, odst. 13-8.



### Parabola

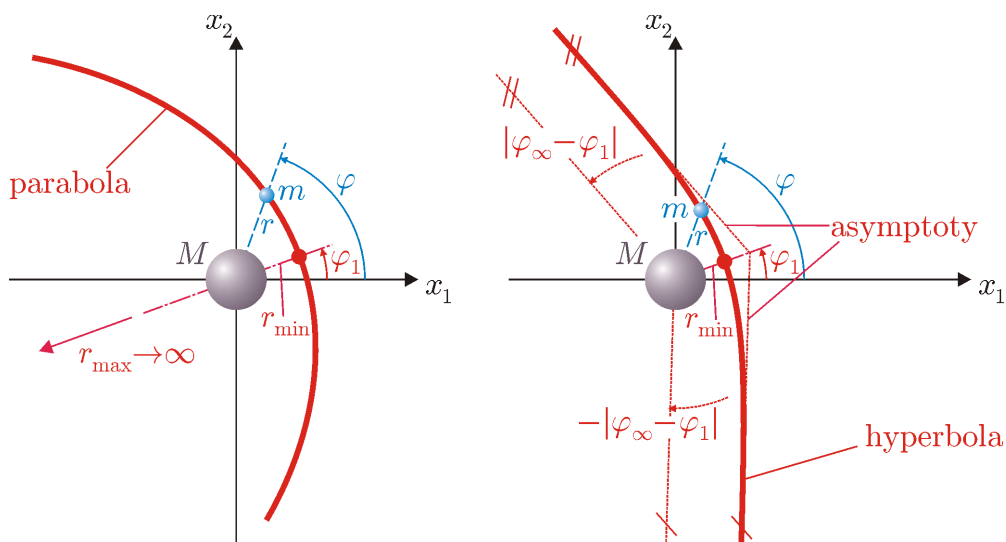
Pro  $\varepsilon = 1$  bude platit

$$E = 0 \quad \Rightarrow \quad T = -V = G \frac{Mm}{r}.$$

To znamená, že  $T \rightarrow 0$ , když  $r \rightarrow \infty$ . Z toho plyne, že v nekonečnu bude mít těleso  $m$  nulovou rychlost. Trajektorii tělesa  $m$  můžeme v tomto případě zkoumat pomocí limity  $E \rightarrow 0$  v předchozích vztazích (1.208) a (1.209) pro elipsu:

$$r_{\min} \rightarrow r^* = \frac{p_\varphi^2}{2GMm^2}, \quad r_{\max} \rightarrow \infty.$$

Tento výsledek jsme obdrželi, když jsme úlohu řešili kvalitativně, jak popisuje vztah (1.198). Tehdy jsme však ještě nenalezli tvar trajektorie pro tento případ. Nyní vidíme, že trajektorii je zvětšující se elipsa nade všechny meze, která se postupně blíží tvaru paraboly. Tato trajektorie je ukázána na obr. 1.26 vlevo.



Obrázek 1.26: Vlevo: Trajektorie tělesa  $m$  je parabola. Vpravo: Trajektorie tělesa  $m$  je hyperbola.

### Hyperbola

Poslední případ, který zbývá, je  $\varepsilon > 1$ . Z druhého vztahu (1.204) plyne, že

$$E > \frac{(GM)^2 m^3}{2p_\varphi^2} \quad \Rightarrow \quad E > 0.$$

Z rovnice trajektorie (1.203) dále plyne, že, pokud  $r \rightarrow \infty$ , kdy se těleso  $m$  dostává do nekonečna, musí platit

$$\cos(\varphi - \varphi_1) \rightarrow -\frac{1}{\varepsilon}. \quad (1.210)$$

To ovšem znamená, že argument funkce kosinus dosáhne minimální nebo maximální hodnoty

$$\varphi_\infty - \varphi_1 = \pm \arccos\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right). \quad (1.211)$$

Dosadíme-li ze druhé rovnice (1.204), dostáváme

$$\varphi_{\infty} - \varphi_1 = \pm \arccos \left[ -\frac{GMm^2}{\sqrt{2mEp_{\varphi}^2 + (GMm^2)^2}} \right]. \quad (1.212)$$

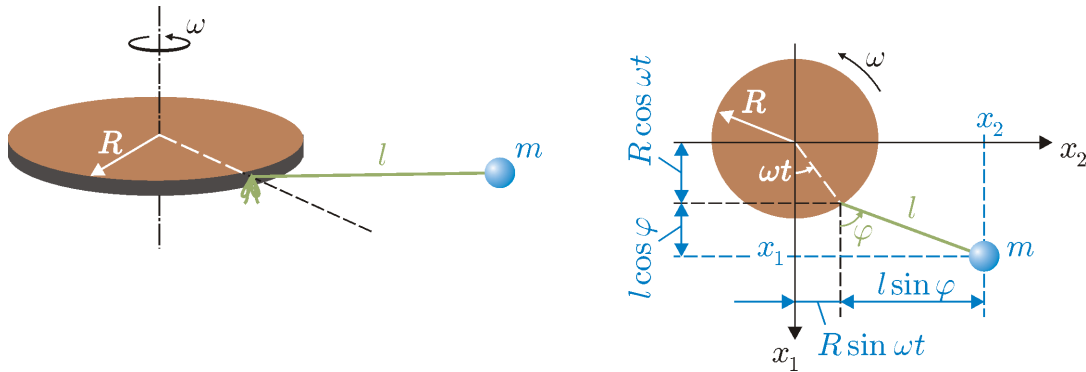
Uvedené úvahy nás vedou k závěru, že ve velmi velké vzdálenosti se těleso  $m$  bude asymptoticky pohybovat buď po přímce, která svírá s osou  $x_1$  úhel  $|\varphi_{\infty} - \varphi_1|$ , anebo po přímce, která svírá s osou  $x_1$  úhel  $-|\varphi_{\infty} - \varphi_1|$ . Trajektorií tělesa  $m$  je tedy hyperbola, jejíž asymptotami jsou uvedené přímky. Nejbližše se těleso  $m$  dostane k tělesu  $M$  (nacházejícímu se v počátku souřadného systému), když  $\cos(\varphi + \varphi_1) = 1$ . Pro tuto vzdálenost podle (1.203) platí

$$r_{\min} = \frac{r^*}{1 + \varepsilon} = \frac{p_{\varphi}^2 / (GMm^2)}{1 + \sqrt{2mEp_{\varphi}^2 / (GMm^2)^2 + 1}},$$

což již známe z kvalitativního řešení úlohy, viz vztah (1.199). Na obr. 1.26 vpravo je ukázána trajektorie ve tvaru hyperboly, po které se těleso  $m$  nyní pohybuje.

### 1.8.7 Matematické kyvadlo přivázané k rotujícím disku

Disk o poloměru  $R$  rovnoměrně rotuje okolo své osy s konstantní úhlovou rychlostí  $\omega$ . Na jeho okraji je přivázané lanko délky  $l$ . K jeho druhému konci je zavěšeno závaží o hmotnosti  $m$ , které se může pohybovat pouze v rovině disku. Na závaží  $m$  nepůsobí žádná další síla kromě lanka. Mechanická soustava je zachycena na obr. 1.27 vlevo. Zjistěte pohyb závaží  $m$ .



Obrázek 1.27: Vlevo: Závaží o hmotnosti  $m$  je přivázané lankem délky  $l$  k okraji disku o poloměru  $R$ . Disk se rovnoměrně otáčí okolo své osy s konstantní úhlovou rychlostí  $\omega$ . Vpravo: Pohled shora, geometrický význam zobecněné souřadnice  $\varphi$ .

**Řešení:** Zvolíme kartézský souřadný systém takový, že disk náleží rovině  $x_1x_2$ , tzn. jeho osa je rovnoběžná s osou  $x_3$  a má stejnou orientaci, jako vektor úhlové rychlosti, se kterou se disk otáčí, viz obr. 1.27 vpravo. V čase  $t = 0$  se bod okraje disku, ve kterém je lanko přivázané nachází na ose  $x_1$ .

#### • Počet stupňů volnosti

Pohyb závaží  $m$  je vázáno k oblouku kružnice okolo bodu, ve kterém je lanko k okraji disku

přivázáno. Mechanická soustava tvořená pouze tímto tělesem (pohyb disku je znám) proto má  $M = 3N - 2 = 1$  stupeň volnosti a tudíž postačí jedna zobecněná souřadnice.

### • Hledání zobecněné souřadnice

Vzhledem k tvaru křivky, po které se závaží pohybuje, bude zobecněnou souřadnicí úhel  $\varphi$  odklonu průvodiče od osy  $x_1$ . Disk se dále rovnoměrně otáčí okolo své osy. Za čas  $t$  se tedy otočí o úhel  $\omega t$ , přičemž v čase  $t = 0$  je jeho krajní bod, ke kterému je lanko přivázáno, nachází na ose  $x_1$ . S přihlédnutím k této skutečnosti budou transformační vztahy mezi kartézskými souřadnicemi a zobecněnou souřadnicí závaží  $m$  následující:

$$x_1(\varphi, t) = R \cos \omega t + l \cos \varphi, \quad x_2(\varphi, t) = R \sin \omega t + l \sin \varphi, \quad x_3 = 0.$$

Odtud kartézské složky rychlostí jsou potom tyto:

$$\dot{x}_1 = -R\omega \sin \omega t - l\dot{\varphi} \sin \varphi, \quad \dot{x}_2 = R\omega \cos \omega t + l\dot{\varphi} \cos \varphi, \quad \dot{x}_3 = 0,$$

a dále jejich kvadráty:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1^2 &= R^2\omega^2 \sin^2 \omega t + 2Rl\omega\dot{\varphi} \sin \varphi \sin \omega t + l^2\dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi, \\ \dot{x}_2^2 &= R^2\omega^2 \cos^2 \omega t + 2Rl\omega\dot{\varphi} \cos \varphi \cos \omega t + l^2\dot{\varphi}^2 \cos^2 \varphi, \\ \dot{x}_3^2 &= 0. \end{aligned}$$

### • Vyjádření Lagrangeovy funkce

Kinetickou energii  $T$  nalézáme ve tvaru

$$\begin{aligned} T &= \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} m \dot{x}_i^2 = \frac{1}{2} m R^2 \omega^2 + m R l \omega \dot{\varphi} (\sin \varphi \sin \omega t + \cos \varphi \cos \omega t) + \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2 = \\ &= \frac{1}{2} m R^2 \omega^2 + m R l \dot{\varphi} \omega \cos(\varphi - \omega t) + \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2. \end{aligned}$$

Na závaží  $m$  nepůsobí žádná vtištěná síla, proto

$$V = 0.$$

Lagrangeova funkce  $L$  je tedy následující:

$$L \equiv T - V = T = \frac{1}{2} m R^2 \omega^2 + m R l \dot{\varphi} \omega \cos(\varphi - \omega t) + \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2. \quad (1.213)$$

### • Sestavení pohybové rovnice

Pohybová rovnice bude jediná, neboť polohu závaží  $m$  popisujeme pomocí jedné zobecněné souřadnice  $\varphi$ . Nejprve vyjádříme

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = m R l \omega \cos(\varphi - \omega t) + m l^2 \dot{\varphi}.$$

Totální derivace tohoto výrazu

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) = -m R l \omega (\dot{\varphi} - \omega) \sin(\varphi - \omega t) + m l^2 \ddot{\varphi}$$

je levou stranou pohybové rovnice, zatímco pravou její stranou je parciální derivace

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -mRl\dot{\varphi}\omega \sin(\varphi - \omega t).$$

Pohybovou rovnici tedy nacházíme ve tvaru

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \varphi} \Rightarrow -mRl\omega (\dot{\varphi} - \omega) \sin(\varphi - \omega t) + ml^2 \ddot{\varphi} = -mRl\dot{\varphi}\omega \sin(\varphi - \omega t).$$

Po roznásobení závorky na levé straně rovnice se členy  $-mRl\dot{\varphi}\omega \sin(\varphi - \omega t)$  na obou stranách vyruší. Její konečný tvar je tedy tento:

$$ml^2 \ddot{\varphi} + mRl\omega^2 \sin(\varphi - \omega t) = 0.$$

### • Řešení pohybové rovnice

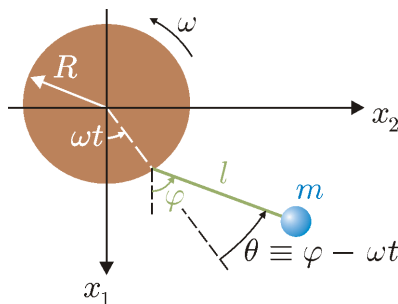
Nalezli jsme tedy pohybovou rovnici

$$\ddot{\varphi} + \frac{R\omega^2}{l} \sin(\varphi - \omega t) = 0, \quad (1.214)$$

přičemž jsme obě strany vydělili výrazem  $ml^2$ . Tato rovnice je obyčejnou diferenciální rovnicí druhého řádu a její řešení je funkce  $\varphi(t)$ . Abychom tuto funkci našli, nejprve zavedeme substituci

$$\theta \equiv \varphi - \omega t \Rightarrow \dot{\theta} = \dot{\varphi} - \omega \Rightarrow \ddot{\theta} = \ddot{\varphi}. \quad (1.215)$$

Úhel  $\theta$  je přitom zřejmě úhel odklonu lanka od spojnice mezi středem disku a bodem, kde je lanko k disku přivázáno, viz obr. 1.28.



Obrázek 1.28: Geometrický význam úhlu  $\theta \equiv \varphi - \omega t$ .

Pohybová rovnice (1.214) potom bude ve tvaru

$$\ddot{\theta} + \frac{R\omega^2}{l} \sin \theta = 0. \quad (1.216)$$

Tato rovnice je formálně shodná s pohybovou rovnicí matematického kyvadla, viz (1.136) na str. 51. Rozdíl spočívá v tom, že zde výraz  $R\omega^2$  nahradil původní tíhové zrychlení  $g$ . Vysvětlení této skutečnosti je zřejmé: Přechodem k zobecněné souřadnici  $\varphi$  pohyb závaží  $m$  popisujeme v neinerciální vztažné soustavě spojené s bodem na okraji disku, ve kterém je lanko přivázáno. Zrychlení  $R\omega^2$  spojené s odstředivou silou o velikosti  $mR\omega^2$  jako setrvačnou

silou pozorovanou v této souřadné soustavě zde zastupuje tíhové zrychlení  $g$ . Je překvapivé, že v případě matematického kyvadla odstředivá síla závisící na vzdálenosti od osy otáčení způsobuje přesně stejné kmity jako tíhová síla, která je v každém bodě trajektorie závaží konstantní.

Protože je diferenciální rovnice (1.216) nelineární, budeme opět předpokládat pouze „malé“ kmity a provedeme tak její linearizaci užitím aproximace

$$\sin \theta \cong \theta.$$

Máme tedy řešit linearizovanou diferenciální rovnici:

$$\ddot{\theta} + \frac{R\omega^2}{l}\theta = 0.$$

Její řešení je

$$\theta(t) = A \sin(\Omega t + \phi), \quad \text{kde} \quad \Omega \equiv \sqrt{\frac{R\omega^2}{l}} \quad (1.217)$$

a kde  $A$  a  $\phi$  jsou integrační konstanty. Ty se určí z počátečních podmínek

$$\theta(0) = \theta_0, \quad \dot{\theta}(0) = \omega_0. \quad (1.218)$$

Vidíme, že i řešení je formálně shodné s řešením kmitů matematického kyvadla, viz (1.139) na str. 51, a tudíž určení integračních konstant je rovněž shodné.

### A co zákony zachování?

Všimli jsme si, že tentokrát Lagrangeova funkce (1.213) explicitně závisí jak na zobecněné souřadnici  $\varphi$  (a tím i na  $\theta$ ), tak i na čase  $t$ . Neočekáváme tedy zde žádný zákon zachování, přesto se ukáže být užitečnou diskuse integrálu energie:

$$h \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \dot{\varphi} - L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2}mR^2\omega^2 = T - mRl\dot{\varphi}\omega \cos(\varphi - \omega t) - mR^2\omega^2. \quad (1.219)$$

Vidíme, že nyní opravdu  $h \neq T + V$ . Nahradíme-li v integrálu energie zobecněnou souřadnici  $\varphi$  úhlem  $\theta$ , viz (1.215), dostáváme

$$h = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta} - \omega)^2 - \frac{1}{2}mR^2\omega^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - ml^2\omega\dot{\theta} + \frac{1}{2}m(l^2 - R^2)\omega^2.$$

Při linearizaci počítáme s „malými“ kmity, při nichž zanedbáváme členy úměrné  $\dot{\theta}^2$  vůči členům  $\dot{\theta}$ , tedy

$$h \cong -ml^2\omega\dot{\theta} + \frac{1}{2}m(l^2 - R^2)\omega^2.$$

Integrál energie se zřejmě v čase mění a tyto změny prozkoumáme jeho totální derivací podle času:

$$\frac{dh}{dt} = -ml^2\omega\ddot{\theta} = ml^2\omega\Omega^2 A \sin(\Omega t + \phi) = ml^2\omega\Omega^2\theta,$$

kde jsme za  $\ddot{\theta}$  dosadili druhou derivaci úhlu  $\theta(t)$  vyjádřeného (1.217). Derivace integrálu energie vyjadřuje výkon, který na závaží  $m$  koná disk během jeho rovnoměrné rotace. Když je závaží vzhledem k otáčení disku „před“ bodem zavěšení kyvadla ( $\theta > 0$ ), disk zde koná kladnou práci a tudíž  $dh/dt > 0$ . Je-li naopak závaží „za“ bodem zavěšení kyvadla ( $\theta < 0$ ), rovnoměrně otáčející se disk koná zápornou práci, tj.  $dh/dt < 0$ . Pokud  $\theta = 0$ , závaží se vzhledem k disku nepohybuje, rovnoměrně se spolu s diskem otáčí a proto disk koná nulovou práci:  $dh/dt = 0$ .

## 1.9 Princip nejmenší akce

Hledání veličiny či veličin, které při nějakém fyzikálním jevu nabývají extrémní hodnoty, probíhalo téměř současně s hledáním pohybových rovnic mechanických soustav již od poloviny 17. století a vžil se pro ně název *integrální principy*. Jednou z prvních takových objevených veličin byl čas, který potřebuje světlo, aby prošlo z jednoho bodu do druhého. Ukazuje se, že nalezení takového tvaru paprsku, pro který tento čas nabývá minimální hodnoty, dává správné výsledky, např. Snellův zákon nebo zákon odrazu. Dnes se tomuto integrálnímu principu používanému v geometrické optice říká *Fermatův princip*. Až zhruba o 100 let později se podařilo nalézt veličinu, která nabývá extrému (nejčastěji minima) v průběhu pohybu libovolné mechanické soustavy. V tomto odstavci se budeme věnovat základním rysům některých integrálních principů.

### 1.9.1 Fermatův princip a Snellův zákon

Abychom lépe porozuměli integrálnímu principu používanému v mechanice, kterému se budeme věnovat později, je vhodné nejprve prozkoumat Fermatův princip. Jak uvidíme, jeho podstatu lze ukázat za pomoci „přirozených“ úvah na následujících příkladech. Toto byl zřejmě i důvod, proč se Fermatův princip objevil o celé století dříve než „mechanický“ integrální princip.

**Příklad 1.8** Z pevného bodu  $A$  vychází světlo všemi směry. V pevném bodě  $B \neq A$  se nachází detektor, který je citlivý na světlo přicházející z libovolné strany. Diskutujte časy, které jsou potřeba pro to, aby se světlo dostalo z bodu  $A$  do bodu  $B$  podél paprsku zcela libovolného tvaru. V celém prostoru je vakuum.

**Řešení:** Vzhledem k tomu, že vakuum je zde jediným prostředím, rychlost světla  $c$  v každém bodě je konstantní.<sup>38</sup> Čas  $\tau'$ , který světlo potřebuje na šíření z bodu  $A$  do bodu  $B$ , je

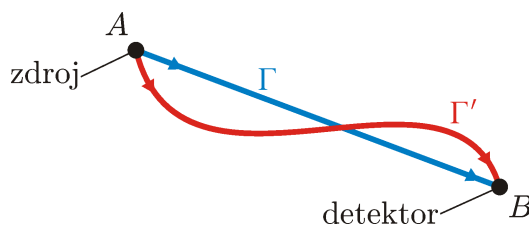
$$\tau' = \int_{\Gamma'} \frac{ds'}{c} = \frac{s'}{c},$$

kde  $\Gamma'$  je křivka paprsku, podél kterého se světlo přemísťuje, přičemž její počáteční bod je  $A$  a koncový bod  $B$  a  $s'$  je její délka. Vidíme, že čas  $\tau'$  je přímo úměrný délce křivky  $\Gamma'$ . Proto ze všech možných paprsků existuje jeden, po kterém se světlo přemístí za nejkratší čas: po úsečce  $\Gamma$ , jejíž krajní body jsou  $A$  a  $B$ . Potom nejkratší čas je  $\tau = s/c$ , kde  $s$  je vzdálenost mezi oběma body. Podle geometrické optiky bude při experimentu tvar paprsku odpovídat právě této úsečce. Geometrie úlohy je zachycena na obr. 1.29.

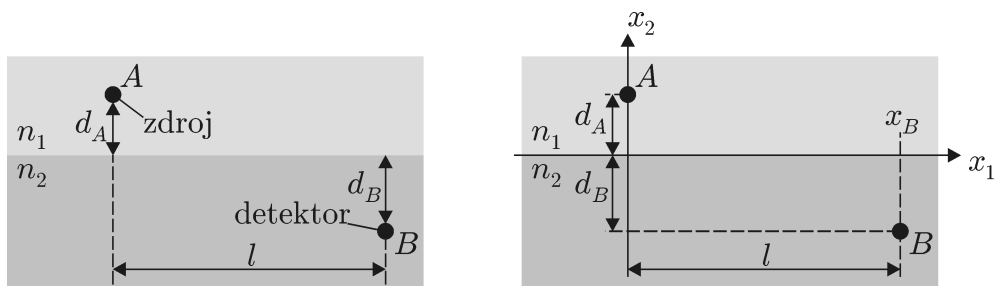
**Příklad 1.9** Z pevného bodu  $A$  vychází světlo všemi směry a v pevném bodě  $B$  se nachází detektor, jako v předchozím příkladu. Nyní se bod  $A$  nachází v prostředí 1 o indexu lomu  $n_1$  a bod  $B$  v prostředí 2 o indexu lomu  $n_2$ . Obě prostředí na sebe těsně doléhají, přičemž rozhraní mezi nimi je rovinné. Bod  $A$  je umístěn ve vzdálenosti  $d_A$  od rozhraní, bod  $B$  ve vzdálenosti  $d_B$  od rozhraní. Oba body se dále nacházejí na různých přímkách kolmých k rozhraní, mezi nimiž je vzdálenost  $l$ . Geometrie této úlohy je ukázána na obr. 1.30 vlevo. Diskutujte časy potřebné k přemístění světla podél libovolného paprsku.

**Řešení:** Zvolíme kartézský souřadný systém takový, že se jeho počátek nachází na rozhraní, přičemž osa  $x_2$  je k rozhraní kolmá a nachází se na ní bod  $A$ , viz obr. 1.30 vpravo. Velikost

<sup>38</sup> $c \doteq 3 \cdot 10^8$  m/s



Obrázek 1.29: Zdroj světla se nachází v bodě  $A$ , detektor v bodě  $B$ . Podél paprsku ve tvaru křivky  $\Gamma'$  se světlo přemístí za čas  $\tau'$ . Nejmenší čas  $\tau$  je potřeba na to, aby se světlo přemístilo po úsečce  $\Gamma$ .



Obrázek 1.30: Vlevo: Zdroj světla se nachází v bodě  $A$ , detektor v bodě  $B$ . Obě zařízení jsou v různých prostředích charakterizovaných indexy lomu  $n_1$  a  $n_2$ . Vpravo: Volba souřadného systému.

rychlosti  $v$  šíření světla je nepřímo úměrná indexu lomu  $n$  prostředí<sup>39</sup>

$$v = \frac{c}{n},$$

a proto čas  $\tau'$ , během kterého se světlo přemístí z bodu  $A$  do bodu  $B$  je

$$\tau' = \int_{\Gamma'} \frac{ds'}{v} = \frac{1}{c} \int_{\Gamma'} n ds', \quad (1.220)$$

kde  $\Gamma'$  je křivka paprsku, jejíž počáteční bod je  $A$  a koncový bod  $B$ .

Hledejme takovou křivku  $\Gamma$ , pro níž čas nabývá nejmenší hodnoty  $\tau$ . V předchozím příkladu jsme ověřili očekávaný závěr, že v homogenním prostředí je tvarem paprsku úsečka, má-li se světlo přemístit mezi dvěma body za nejkratší čas. Očekáváme tedy, že hledaná křivka  $\Gamma$  bude sestávat v každém z prostředí ze dvou úseček, které na sebe navazují v bodě  $C$  na rozhraní, jehož poloha na ose  $x_1$  je  $x_C$ . Protože správnou polohu bodu  $x_C$  zatím neznáme, vyjádříme čas  $\tau'$ , během kterého se světlo přemístí podél lomené čáry  $\Gamma'$  s libovolným bodem zlomu  $C'$  na rozhraní podle obr. 1.31 vlevo:

$$\tau' = \frac{1}{c} \int_{\Gamma'} n ds' = \frac{1}{c} \left[ n_1 \sqrt{(x'_C)^2 + d_A^2} + n_2 \sqrt{(l - x'_C)^2 + d_B^2} \right].$$

Zbývá jen určit polohu bodu  $x_C$  takovou, aby  $\tau'$  nabylo minimální hodnoty  $\tau$ . Musí tedy platit

$$\left. \frac{d\tau'}{dx'_C} \right|_{x'_C=x_C} = \frac{1}{c} \left[ n_1 \frac{x_C}{\sqrt{x_C^2 + d_A^2}} - n_2 \frac{l - x_C}{\sqrt{(l - x_C)^2 + d_B^2}} \right] = 0, \quad (1.221)$$

<sup>39</sup>Viz např. D. Halliday, R. Resnick, J. Walker: *Fyzika*. 2. vydání, VUTIUM, Brno 2013, kap. 35, odst. 35-2.

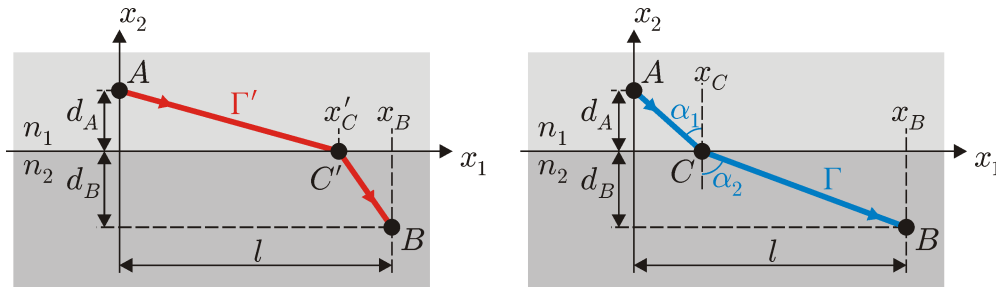
odkud

$$n_1 \frac{x_C}{\sqrt{x_C^2 + d_A^2}} = n_2 \frac{l - x_C}{\sqrt{(l - x_C)^2 + d_B^2}}.$$

Z geometrie plyne, že oba zlomky vyjadřují siny úhlů, které svírají paprsky a kolmice v obou prostředích, viz obr. 1.31 vpravo. Znamená to, že platí

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2, \quad (1.222)$$

což je vyjádřením Snellova zákona<sup>40</sup> (zákonu lomu).



Obrázek 1.31: Zdroj světla se nachází v bodě  $A$ , detektor v bodě  $B$ , přičemž obě zařízení se nacházejí v odlišných prostředích o indexech lomu  $n_1$  a  $n_2$ . Vlevo: Podél lomené čáry  $\Gamma'$  se světlo přemístí za čas  $\tau'$ . Vpravo: Nejmenší čas  $\tau$  je potřeba na to, aby se světlo přemístilo po lomené čáře  $\Gamma$ . Vzniklé úhly  $\alpha_1$  a  $\alpha_2$  odpovídají Snellovu zákonu (1.222).

Uvedený výpočet nyní okomentujeme, přičemž nebudeme již rozlišovat mezi všemi možnými křivkami  $\Gamma'$  a křivkou  $\Gamma$ , po níž se paprsek přemísťuje v nejkratším čase. Abychom zjistili, za jakých okolností nastane minimální hodnota  $\tau$ , použili jsme operaci derivace. Ze základního kurzu diferenciálního počtu však víme, že v extremu (zde v minimu) funkce je její diferenciál roven nule, neboli platí

$$d\tau = \frac{d\tau}{dx_C} dx_C = 0.$$

I když jsme nakonec čas  $\tau'$  derivovali podle polohy bodu  $C'$ , ve skutečnosti  $\tau'$  zde není funkcí jedné proměnné ale konkrétní celé křivky  $\Gamma'$ , po které se integruje. Proto se zde formálně namísto „d“ používá „δ“. Hledání minima  $\tau$  tedy bychom pomocí (1.220) zapsali takto:

$$\delta\tau = \delta \int_{\Gamma} \frac{ds}{v} = 0. \quad (1.223)$$

<sup>40</sup>Viz např. D. Halliday, R. Resnick, J. Walker: *Fyzika*. 2. vydání, VUTIUM, Brno 2013, kap. 33, odst. 33-8.



## Závěr

Oba příklady podpořily závěry obecného principu, jenž říká, že se světlo vždy přemísťuje podél paprsku takového tvaru, že čas během jeho přemísťování nabývá nejmenší hodnoty. Toto je formulace Fermatova principu.

Uvedenými dvěma příklady jsme dále chtěli ukázat, jak postupujeme při používání integrálních principů:

- Zkoumáme **různé závislosti** použitých veličin bez ohledu na to, zda jsou nebo nejsou takové závislosti vůbec fyzikálně možné. Tyto závislosti jsou popsány konkrétními funkcemi. (V uvedených dvou příkladech jsme uvažovali o všech tvarech paprsků včetně těch, které ve skutečnosti nemohou nastat.)
- Bereme však v úvahu pouze takové funkce, jejichž **krajní body jsou pevné**. (Všechny uvažované paprsky měly shodný počáteční a koncový bod  $A$  a  $B$ .)
- Jednotlivým funkcím přiřadíme hodnoty jediné veličiny. Zjistíme-li, že pro konkrétní funkce tato veličina nabývá extrému, zpravidla **minima**, tuto veličinu nazveme **akcí**. (Akcí byl v uvedených příkladech čas, který světlo potřebuje k přemístění z bodu  $A$  do bodu  $B$ .)
- Na závěr zjišťujeme, zda se s konkrétními funkcemi použitých veličin spojenými s nalezeným extremem (minimem) akce pojí nějaký **fyzikální zákon**. (Takto jsme objevili přímý paprsek v homogenním prostředí nebo Snellův zákon na rozhraní mezi dvěma prostředími.)

Poznamenejme, že v matematice se zobrazení, které každé funkci nebo souboru funkcí přiřazuje číslo (hodnotu akce), nazývá *funkcionál*. Typickým funkcionálem je určitý integrál, který dal jméno integrálním principům, neboť pomocí něj se integrální principy formulují. Pokud hledáme minimum akce, říkáme, že používáme *princip nejmenší akce*. Principu nejmenší akce popisujícímu mechnické soustavy se nyní budeme věnovat v dalších odstavcích.

## 1.9.2 Volná částice

Budeme hledat veličinu, kterou prohlásíme za akci pro případ volné částice, tj. částice ve volném prostoru, na kterou nepůsobí žádná síla. Na základě předchozích poznámek budeme předpokládat, že akce je rovna určitému integrálu nějaké funkce. Protože u mechanických soustav sledujeme především časový vývoj jejich pohybového stavu, jako integrační proměnnou zvolíme čas. Akci tedy budeme předpokládat ve tvaru

$$S = \int_{t_0}^{t_1} f dt, \quad (1.224)$$

kde  $t_0$  je počáteční okamžik,  $t_1 (> t_0)$  je konečný okamžik a  $f$  je zatím neznámá funkce popisující pohybový stav volné částice v daném okamžiku. Abychom tuto funkci našli, provedeme následující úvahy: funkce  $f$  volné částice nemůže být závislá ani na čase ani na poloze, neboť existuje tzv. translační symetrie prostoru i času, která říká, že fyzikální zákony platí stejně ve všech bodech a ve všech časech. Jinými slovy: pohybový stav částice se nezmění posuneme-li ji, či budeme-li ji pozorovat jindy. Zbývá pouze její rychlost. Vzhledem k tomu, že existuje i rotační symetrie prostoru, neboli všechny směry jsou rovnocenné, zůstane pouze závislost na

velikosti rychlosti. Začneme tedy s nejjednodušší závislostí, tedy lineární závislostí na kvadrátu velikosti rychlosti:

$$f(v^2) = \alpha v^2, \quad (1.225)$$

kde  $\alpha$  je konstanta. Nyní se budeme věnovat hledání minima akce  $S$ , což matematicky zapíšeme podle (1.223) takto:

$$\delta S = \delta \int_{t_0}^{t_1} f(v^2) dt = \alpha \delta \int_{t_0}^{t_1} v^2 dt = 0. \quad (1.226)$$

Abychom prozkoumali všechny myslitelné závislosti  $v^2(t)$  (bez ohledu na to, zda jsou fyzikálně možné), budeme muset zatím uvažovat o všech možných (obecně zakřivených) trajektoriích, po kterých se volná částice může pohybovat. Až na závěr potom zjistíme, zda se s minimem akce  $S$  pojí očekávaný fyzikální zákon, že volná částice se pohybuje rovnoměrným přímočarým pohybem, popř. se nepohybuje.

Krajní body však mají být pevné. Předpokládejme tedy, že v počátečním čase  $t_0$  se volná částice nachází v bodě  $\mathbf{r}_0 \equiv \mathbf{r}(t_0)$  a v koncovém čase  $t_1$  v bodě  $\mathbf{r}_1 \equiv \mathbf{r}(t_1)$ , přičemž obě krajní podmínky platí pro všechny možné trajektorie. Pokud se např. částice na jedné ze svých trajektorií „zdrží“ v okolí počátečního bodu, bude se muset „rychle přemístit“ ke koncovému bodu. Naopak, pokud částice (na jiné) trajektorii „vyrazí rychle“, bude muset „zpomalit“ v blízkosti koncového bodu. Matematicky toto zapíšeme následujícím způsobem:

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_0 + \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{v}(t) dt \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0 = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{v}(t) dt \quad (1.227)$$

pro každou z uvažovaných trajektorií. Pokud by se částice mezi oběma krajními body pohybovala s konstantní rychlostí  $\mathbf{v}_0$ , platil by pro tuto rychlost vztah

$$\mathbf{v}_0 = \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0}{t_1 - t_0}. \quad (1.228)$$

Rovnici (1.226) potom budeme řešit tak, že vektor rychlosti  $\mathbf{v}(t)$ , kterou má částice na dané trajektorii v každém okamžiku, vyjádříme jako součet konstantní rychlosti  $\mathbf{v}_0$  a odchylky  $\Delta\mathbf{v}(t)$  od této konstantní rychlosti, takže platí

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \Delta\mathbf{v}(t). \quad (1.229)$$

Uvedená geometrie je ukázána na obr. 1.32. Podle (1.227) potom platí

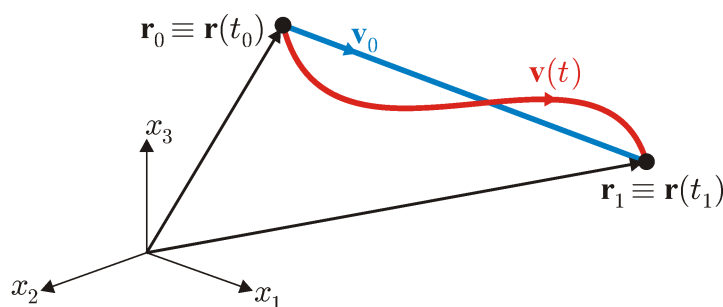
$$\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0 = \int_{t_0}^{t_1} [\mathbf{v}_0 + \Delta\mathbf{v}(t)] dt = \mathbf{v}_0 \int_{t_0}^{t_1} dt + \int_{t_0}^{t_1} \Delta\mathbf{v}(t) dt = \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0}{t_1 - t_0} (t_1 - t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \Delta\mathbf{v}(t) dt,$$

odkud

$$\int_{t_0}^{t_1} \Delta\mathbf{v}(t) dt = \mathbf{0}. \quad (1.230)$$

Potom  $S$  vyjádřené vztahem (1.224), kde použijeme funkci  $f = \alpha v^2$ , nabývá tvaru

$$\begin{aligned} S &= \int_{t_0}^{t_1} \alpha v^2 dt = \alpha \int_{t_0}^{t_1} [\mathbf{v}(t)]^2 dt = \alpha \int_{t_0}^{t_1} [\mathbf{v}_0 + \Delta\mathbf{v}(t)]^2 dt = \\ &= \alpha \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{v}_0^2 dt + \alpha \int_{t_0}^{t_1} 2\mathbf{v}_0 \cdot \Delta\mathbf{v}(t) dt + \alpha \int_{t_0}^{t_1} [\Delta\mathbf{v}(t)]^2 dt = \\ &= \alpha v_0^2 (t_1 - t_0) + 2\alpha \mathbf{v}_0 \cdot \int_{t_0}^{t_1} \Delta\mathbf{v}(t) dt + \alpha \int_{t_0}^{t_1} [\Delta\mathbf{v}(t)]^2 dt. \end{aligned}$$



Obrázek 1.32: Částice se v čase  $t_0$  nacházela v bodě  $\mathbf{r}_0$ , v čase  $t_1$  má být v bodě  $\mathbf{r}_1$ . Uvažujeme o všech možných trajektoriích, po kterých se pohybuje s obecnou rychlostí  $\mathbf{v}(t)$  (červená křivka) včetně rovnoměrného přímočarého pohybu s konstantní rychlostí  $\mathbf{v}_0$  (modrá úsečka). Bereme však v úvahu pouze takové trajektorie, v jejichž krajních bodech se částice nachází v uvedených časech  $t_0$  a  $t_1$ .

Podle (1.230) je však prostřední člen nulový, proto

$$S = \alpha v_0^2(t_1 - t_0) + \alpha \int_{t_0}^{t_1} [\Delta \mathbf{v}(t)]^2 dt. \quad (1.231)$$

Vidíme, že hodnota akce  $S$  při volbě všech možných trajektorií závisí na druhém členu reprezentovaném integrálem. Vzhledem k tomu, že integrandem je kvadrát funkce  $\Delta \mathbf{v}(t)$ , integrál bude vždy kladný. Proto, hledáme-li minimum akce  $S$ , musí v každém okamžiku platit

$$\Delta \mathbf{v}(t) = 0. \quad (1.232)$$

Ze vztahu (1.229) potom plyne, že akce  $S$  nabývá minimální hodnoty, právě když

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0.$$

Minimum akce  $S$  se tedy vskutku pojí s fyzikálním zákonem zvaným 1. Newtonův pohybový zákon<sup>41</sup> (zákon setrvačnosti): volná částice se pohybuje rovnoměrným přímočarým pohybem s konstantní rychlostí

$$\mathbf{v}_0 = \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0}{t_1 - t_0},$$

popř. nulovou rychlostí, pokud  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_0$  (koncový bod pohybu je totožný s počátečním bodem).

Závěrem tedy můžeme říci, že funkce (1.225)

$$f(v^2) = \alpha v^2,$$

je hledaným integrandem v (1.224). V předchozích odstavcích jsme používali fyzikální veličinu, která je úměrná kvadrátu rychlosti: kinetickou energii. Konstantě  $\alpha$  tedy můžeme přiřadit hodnotu poloviny hmotnosti  $m$  částice a akci  $S$  popisující volnou částici můžeme definovat vztahem

$$S \equiv \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2} m v^2 dt.$$

Vzhledem k tomu, že integrál je lineární operací (integrál součtu je roven součtu integrálů), v případě soustavy  $N$  volných částic bude integrand roven součtu kinetických energií všech částic, neboli kinetické energii  $T$  této mechanické soustavy definovanou vztahem (1.4):

$$S \equiv \int_{t_0}^{t_1} \left( \sum_{i=1}^{3N} \frac{1}{2} m \dot{x}_i^2 \right) dt = \int_{t_0}^{t_1} T dt. \quad (1.233)$$

<sup>41</sup>Viz např. D. Halliday, R. Resnick, J. Walker: *Fyzika*. 2. vydání, VUTIUM, Brno 2013, kap. 5, odst. 5-3.

### 1.9.3 Hamiltonův princip

V předchozím odstavci jsme objevili akci popisující soustavu  $N$  volných částic, jako určitý integrál kinetické energie  $T$  této mechanické soustavy, viz (1.233). Jak se však situace změní, když na částice budou působit síly? Kinetická energie  $T$  mechanické energie musí v integrandu zůstat a dále je k ní třeba přičíst či odečíst potenciální energii  $V$  jako fyzikální veličinu popisující silové působení na částice:

$$\int_{t_0}^{t_1} (T \pm V) dt.$$

Jedině tak totiž přejde akce v případě nulových sil ( $V = 0$ ) na tvar (1.233). Použijeme-li znaménka „+“, integrand bude roven integrálu energie  $h$  podle (1.120), avšak pouze v některých případech, jak jsme popsali na str. 45. Zvolíme-li znaménko „-“, integrand bude roven Lagrangeově funkci  $L$ , viz (1.95) na str. 40. Tato definice platí univerzálně pro všechny mechanické soustavy. Proto budeme zkoumat, zda akce definovaná

$$S \equiv \int_{t_0}^{t_1} (T - V) dt \quad (1.234)$$

nabývá minima a jestli se toto minimum pojí s nějakým fyzikálním zákonem.

#### Částice pohybující se po přímce

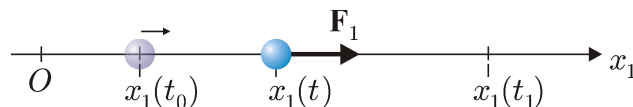
Prozatím se omezíme na jednu částici pohybující se pouze po přímce, se kterou ztotožníme jednu z os kartézského souřadného systému, např. osu  $x_1$ . Na částici působí výslednice konzervativních sil, které jsou popsány pomocí potenciální energie  $V(x_1)$ . Pro složku  $F_1$  výslednice těchto sil v ose  $x_1$  tedy platí

$$F_1 = -\frac{dV}{dx_1}. \quad (1.235)$$

Potom akce této částice bude mít podle (1.234) následující tvar:

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \left[ \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 - V(x_1) \right] dt. \quad (1.236)$$

Hledáme tedy takovou neznámou funkci  $x_1(t)$ , pro níž akce  $S$  nabývá minimální hodnoty a s níž se bude pojít nějaký fyzikální zákon. Proto budeme o této funkci hovořit jako o „fyzikálně správné“. O funkci  $x_1(t)$  však zatím víme jen to, že v čase  $t_0$  se částice nacházela v daném bodě  $x_1(t_0)$  a v čase  $t_1 (> t_0)$  se bude nacházet v daném bodě  $x_1(t_1)$ . Její pohyb je znázorněn na obr. 1.33.



Obrázek 1.33: Částice se v čase  $t_0$  nacházela v bodě  $x_1(t_0)$ , v čase  $t_1$  má být v bodě  $x_1(t_1)$ . Pohyb částice se děje za působení výslednice konzervativních sil  $F_1$ , jejíž průmět do osy  $x_1$  jsme označili  $F_1$ . Uvažujeme o všech možných pohybech podél osy  $x_1$ , ale bereme v úvahu pouze takové pohyby, v jejichž krajních bodech se částice nachází v uvedených časech  $t_0$  a  $t_1$ .

„Fyzikálně správnou“ funkci  $x_1(t)$  nalezneme následujícím postupem: Představíme si nějakou „fyzikálně nesprávnou“ funkci  $x'_1(t)$  popisující pohyb částice, jenž není fyzikálně možný.

Ta se v každém okamžiku od té „správné“ funkce  $x_1(t)$  liší pouze o inﬁnitezimální hodnoty, které označíme pomocí funkce  $\delta x_1(t)$ , takže platí

$$x'_1(t) = x_1(t) + \delta x_1(t). \quad (1.237)$$

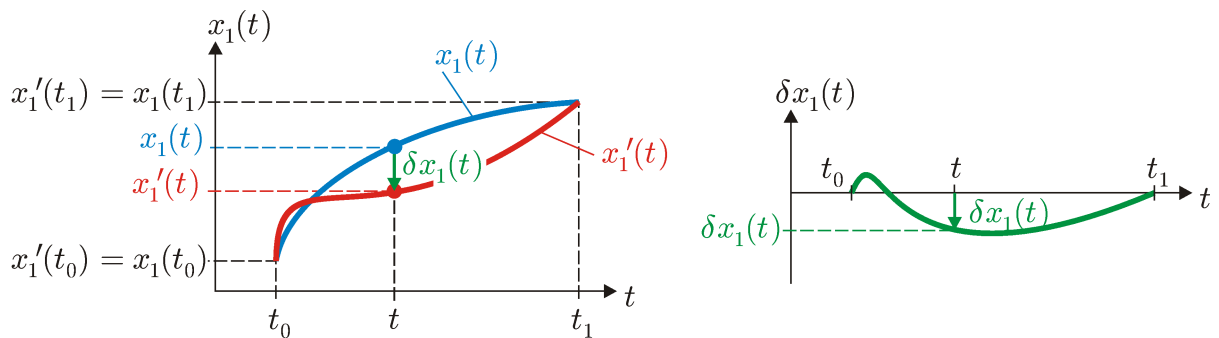
Protože procházíme všechny závislosti  $x'_1(t)$  (bez ohledu na to, zda jsou fyzikálně možné), funkce  $\delta x_1(t)$  je zcela libovolná. Jak jsme detailně popsali v předminulém odstavci, bereme v úvahu pouze takové funkce  $x'_1(t)$ , které mají shodné krajní body  $x_1(t_0)$  a  $x_1(t_1)$ , a proto vždy platí:

$$x'_1(t_0) = x_1(t_0), \quad x'_1(t_1) = x_1(t_1),$$

odkud

$$\delta x_1(t_0) = 0, \quad \delta x_1(t_1) = 0. \quad (1.238)$$

Můžeme tedy říci, že funkce  $\delta x_1(t)$  je libovolná na intervalu  $t_0 < t < t_1$ . V „krajních“ časech  $t_0$  a  $t_1$  je ale vždy nulová. Příklad grafů všech uvedených funkcí je na obr. 1.34.



Obrázek 1.34: Vlevo: Závislosti polohy částice na čase. „Fyzikálně správná“ závislost  $x_1(t)$  je označena modře, „fyzikálně nesprávná“ závislost  $x'_1(t)$  červeně. Rozdíl mezi nimi udává funkce  $\delta x_1(t)$ , viz vztah (1.237), jejíž graf je ukázán na obrázku vpravo.

Můžeme tedy vyjádřit potenciální energii v bodě  $x'_1$  pomocí potenciální energie v bodě  $x_1$  tak, že napíšeme její Taylorův rozvoj, přičemž vynecháme všechny inﬁnitezimální veličiny řádu vyššího než prvního:

$$V(x'_1) = V(x_1 + \delta x_1) = V(x_1) + \frac{dV}{dx_1} \delta x_1. \quad (1.239)$$

Dále můžeme vyjádřit i kvadrát rychlosti, kde vynecháváme člen  $(\delta \dot{x}_1)^2$  rovněž představující inﬁnitezimální veličinu vyššího řádu:

$$\dot{x}'_1(t) = \dot{x}_1(t) + \delta \dot{x}_1(t) \quad \Rightarrow \quad (\dot{x}'_1)^2 = (\dot{x}_1 + \delta \dot{x}_1)^2 = \dot{x}_1^2 + 2\dot{x}_1 \delta \dot{x}_1.$$

Akce  $S'$  odpovídající „fyzikálně nesprávné“ funkci  $x'_1(t)$  tak bude podle (1.236) následující:

$$\begin{aligned} S' &= \int_{t_0}^{t_1} \left[ \frac{1}{2} m (\dot{x}'_1)^2 - V(x'_1) \right] dt = \int_{t_0}^{t_1} \left[ \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + m \dot{x}_1 \delta \dot{x}_1 - V(x_1) - \frac{dV}{dx_1} \delta x_1 \right] dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left[ \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 - V(x_1) \right] dt + \int_{t_0}^{t_1} \left( m \dot{x}_1 \delta \dot{x}_1 - \frac{dV}{dx_1} \delta x_1 \right) dt. \end{aligned}$$

První integrál je zřejmě roven akci  $S$ , použijeme-li „fyzikálně správnou“ funkci  $x_1(t)$ , viz (1.236). Druhý integrál potom musí být  $\delta S$ , o který se  $S'$  liší od  $S$ . Víme však, že akce  $S$  nabývá nejmenší hodnoty, právě když  $\delta S = 0$ . Platí tedy

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} \left( m\dot{x}_1\delta\dot{x}_1 - \frac{dV}{dx_1}\delta x_1 \right) dt = 0.$$

V dalším tedy budeme hledat, za jakých okolností je tento určitý integrál roven nule. O integrandu zatím nemůžeme příliš mnoho říci, protože existuje nekonečně mnoho funkcí takových, jejichž tento integrál je nulový. Rozepíšeme proto následující derivaci:

$$\frac{d}{dt} (m\dot{x}_1\delta x_1) = m\ddot{x}_1\delta x_1 + m\dot{x}_1\delta\dot{x}_1, \quad (1.240)$$

jejíž druhý člen se nachází v integrandu. Potom

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_0}^{t_1} \left[ \frac{d}{dt} (m\dot{x}_1\delta x_1) - m\ddot{x}_1\delta x_1 - \frac{dV}{dx_1}\delta x_1 \right] dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left[ \frac{d}{dt} (m\dot{x}_1\delta x_1) \right] dt + \int_{t_0}^{t_1} \left( -m\ddot{x}_1\delta x_1 - \frac{dV}{dx_1}\delta x_1 \right) dt = 0. \end{aligned}$$

Jak se vzápětí přesvědčíme, vzhledem k (1.238) první integrál vyjde nulový:

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[ \frac{d}{dt} (m\dot{x}_1\delta x_1) \right] dt = m\dot{x}_1\delta x_1 \Big|_{t_0}^{t_1} = m\dot{x}_1(t_1)\delta x_1(t_1) - m\dot{x}_1(t_0)\delta x_1(t_0) = 0.$$

V integrandu druhého integrálu vytkneme  $\delta x_1$ , takže dostáváme:

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} \left( -m\ddot{x}_1 - \frac{dV}{dx_1} \right) \delta x_1(t) dt = 0.$$

Inegrand nyní sestává ze dvou činitelů: závorka a funkce  $\delta x_1(t)$ . Při libovolné volbě funkce  $\delta x_1(t)$  musí integrál vždy vyjít nulový. Toho lze dosáhnout jedině tehdy, když je závorka v každém okamžiku rovna nule. Vzhledem k (1.235) tak přicházíme k pohybové rovnici částice:

$$m\ddot{x}_1 = -\frac{dV}{dx_1} = F_1. \quad (1.241)$$

Závěrem tedy celý výpočet můžeme shrnout takto: Akce definovaná vztahem (1.236) nabývá minima, právě když je funkce  $x_1(t)$  řešením rovnice (1.241). Toto minimum se pojí s fyzikálním zákonem, neboť rovnice (1.241) představuje pohybovou rovnici částice. V další části tohoto odstavce se již zaměříme na princip nejmenší akce popisující vývoj pohybového stavu obecné mechanické soustavy částic.

## Hamiltonův princip

Zjistili jsme, že v případě pohybu jedné částice po přímce je akce, jejíž minimum se musí hledat, rovna určitému integrálu Lagrangeovy funkce  $L \equiv T - V$  podle času, viz (1.234). V odstavci 1.6 na str. 38 jsme shrnuli důvody přechodu od  $3N$  kartézských souřadnic k  $M$  zobecněným souřadnicím, pokud jsou částice mechanické soustavy vázány na křivku, na plochu či jedna k druhé. Tak se Lagrangeova funkce stala funkcí zobecněných souřadnic  $q_j$ , zobecněných rychlostí  $\dot{q}_j$  ( $j = 1, 2, \dots, M$ ) a času  $t$ , viz (1.95) na str. 40.

Na základě těchto skutečností budeme zkoumat akci mechanické soustavy definovanou

$$S \equiv \int_{t_0}^{t_1} L(q_j, \dot{q}_j, t) dt, \quad (1.242)$$

jejíž minimum nastane, jak víme, právě když

$$\delta S = \delta \int_{t_0}^{t_1} L(q_j, \dot{q}_j, t) dt = 0. \quad (1.243)$$

Takto formulovaný princip nejmenší akce se nazývá *Hamiltonův princip* a říká toto: Vývoj pohybového stavu mechanické soustavy probíhá tak, že její „fyzikálně správný“ pohyb se pojí s extremem (nejčastěji minimem) hodnoty akce  $S$ . V dalším odstavci ukážeme, jak nalézt ony „fyzikálně správné“ závislosti všech zobecněných souřadnic  $q_j$  na čase  $t$ .

### 1.9.4 Eulerovy-Lagrangeovy rovnice (podruhé)

Jak již víme, budeme zkoumat všechny možné závislosti všech zobecněných souřadnic  $q_j(t)$ , zpočátku bez ohledu na to, zda jsou takové závislosti fyzikálně možné. Jediné, čím jsou tyto zkoumané závislosti omezené, jsou „pevné“ krajní body  $q_j(t_0)$  a  $q_j(t_1)$  pro všechna  $j = 1, 2, \dots, M$ . Nejdříve vyjádříme, jak se v daném čase změní Lagrangeova funkce, když nastane infinitezimální změna všech zobecněných souřadnic a všech zobecněných rychlostí:

$$\delta L = \sum_{j=1}^M \left( \frac{\partial L}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right). \quad (1.244)$$

Tento vztah nyní detailněji objasníme: První, čeho si všímáme je, že připomíná „nekompletní“ totální diferenciál funkce více proměnných, viz Dodatek A, odst. 3.4 na str. 229. Chybí totiž člen týkající se změny  $L$  v důsledku časové změny. Princip nejmenší akce je však založen na porovnávání různých závislostí  $q_j(t)$  vždy na stejném časovém intervalu  $t_0 \leq t \leq t_1$ . Proto jsme vyjádřili změnu  $L$  pouze v důsledku infinitezimálních změn zobecněných souřadnic a zobecněných rychlostí, ale ne času. Z téhož důvodu se namísto symbolu „d“, týkajícího se totálního diferenciálu funkce, užívá „ $\delta$ “:  $\delta L$ ,  $\delta q_j$ ,  $\delta \dot{q}_j$  atd. Těmto infinitezimálním změnám se v teoretické mechanice říká *variaci*.

Další poznámka se týká toho, že výraz (1.244) předpokládá nezávislost  $q_j$  a  $\dot{q}_j$  pro všechna  $j$ . Je však tento předpoklad správný? Víme, že redukcí původního souboru  $3N$  kartézských souřadnic  $x_i$  jsme získali soubor  $M$  zobecněných souřadnic  $q_j$ , které jsou na sobě nezávislé. Jejich totální derivací podle času jsme získali soubor  $M$  zobecněných rychlostí  $\dot{q}_j$ , které jsou samozřejmě navzájem rovněž nezávislé, neboť jsme je získali z nezávislých zobecněných souřadnic. Můžeme však počítat se souborem  $2M$  nezávislých proměnných  $q_j$  a  $\dot{q}_j$ ? Vždyť zobecněné rychlosti jsme právě vypočítali derivací zobecněných souřadnic! Odpověď zní: Všechny  $2M$  veličin jsou za jistých okolností na sobě nezávislé.

Úvaha vedoucí k této odpovědi je následující: Sestavíme-li pohybové rovnice všech částic, k určení jejich jednoznačné polohy a rychlosti v kterémkoli okamžiku potřebujeme počáteční polohu a rychlost každé z částic. Ty jsou ale zcela libovolné v rámci fyzikálně možných podmínek, za kterých bude daná soustava měnit svůj pohybový stav. Znamená to, že si libovolně můžeme stanovit počáteční polohu každé částice nezávisle na její počáteční rychlosti a naopak. Na vývoj pohybového stavu mechanické soustavy se pak můžeme dívat jako na posloupnost krátkých dějů, při nichž polohy a rychlosti všech částic na konci předchozího děje jsou počátečními podmínkami navazujícího děje. Nezávislost poloh na rychlostech a rychlosti na polohách

tak platí nejen pro počáteční podmínky ale i pro všechny příští okamžiky, během kterých mechanická soustava mění svůj stav (pokud ovšem můžeme počáteční podmínky libovolně měnit).

Pozor! Jsou-li však počáteční podmínky již jednou zadány, pohybové rovnice stanoví i všechny zobecněné souřadnice a všechny zobecněné rychlosti ve všech časech a tyto veličiny již nejsou tudíž nezávislé.

Oprávněnost vztahu (1.244) včetně jeho formální stránky jsme diskutovali a můžeme tedy dále pokračovat v hledání „fyzikálně správných“ funkcí  $q_j(t)$ . Uvažujeme o variacích  $\delta q_j$  a  $\delta \dot{q}_j$ , zatímco integrační proměnnou je čas. Proto můžeme zaměnit pořadí intergrace a variace, takže za pomoci vztahu (1.244) dostáváme:

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} \delta L(q_j, \dot{q}_j, t) dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^M \left( \frac{\partial L}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right) dt = 0, \quad (1.245)$$

přičemž variace  $\delta q_j(t)$  jsou ve všech časech libovolné, až na „krajní body“  $q_j(t_0)$  a  $q_j(t_1)$ , pro něž platí

$$\delta q_j(t_0) = \delta q_j(t_1) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, M). \quad (1.246)$$

Nyní budeme sledovat obdobné kroky, které jsme učinili při hledání minima akce částice pohybující se po přímce, viz předchozí odstavec. O integrandu v (1.245) zatím nemůžeme nic bližšího říci, neboť může být roven nule určitý integrál nekonečně mnoha různých funkcí. Rozepíšeme-li však derivaci

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \quad (j = 1, 2, \dots, M),$$

druhý člen nacházíme v integrandu ve vztahu (1.245). Tento vztah přepíšeme do tvaru

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^M \left[ \frac{\partial L}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \right) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j \right] dt = 0.$$

Poslední integrál rozepíšeme na dva a dále zaměníme pořadí sumace a integrace (sumační index je  $j$ , zatímco integrační proměnná je  $t$ ):

$$\delta S = \sum_{j=1}^M \int_{t_0}^{t_1} \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \right) \right] dt + \sum_{j=1}^M \int_{t_0}^{t_1} \left[ \frac{\partial L}{\partial q_j} \delta q_j - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j \right] dt = 0. \quad (1.247)$$

První z obou sum je rovna nule, jak lze ukázat užitím (1.246):

$$\sum_{j=1}^M \int_{t_0}^{t_1} \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \right) \right] dt = \sum_{j=1}^M \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \Big|_{t_0}^{t_1} = \sum_{j=1}^M \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \Big|_{t=t_1} \delta q_j(t_1) - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \Big|_{t=t_0} \delta q_j(t_0) \right] = 0.$$

V integrandu druhého integrálu v (1.247) vytkneme  $\delta q_j$ , takže dostáváme:

$$\delta S = \sum_{j=1}^M \int_{t_0}^{t_1} \left[ \frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \right] \delta q_j(t) dt = 0.$$

Všechny variace  $\delta q_j(t)$  jsou libovolné a všechny zobecněné souřadnice  $q_j$  jsou dále na sobě nezávislé. Jediný způsob, jak zajistit za všech okolností nulovost poslední sumy integrálů tedy je, že všechny hranaté závorky pro každé  $j = 1, 2, \dots, M$  jsou rovny nule, tj.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2, \dots, M). \quad (1.248)$$



Výsledkem tedy je zjištění, že  $S$  nabývá extrému, právě když jsou všechny funkce  $q_j(t)$  řešením rovnic (1.248). Tento extrém se dále pojí s fyzikálním zákonem představujícím pohybové rovnice mechanické soustavy, neboť (1.248) jsou Eulerovy-Lagrangeovy rovnice, které jsme našli již dříve, viz (1.96) na str. 41.

## 1.10 Řešené úlohy na princip nejmenší akce

Princip nejmenší akce (1.243) nazývaný Hamiltonův princip nás přivedl zpět k Eulerovým-Lagrangeovým rovnicím, pomocí nichž jsme již dříve vyřešili několik úloh, viz odst. 1.8 od str. 46. Mohli bychom tedy tyto úvahy v tomto místě ukončit, neboť jsme zdánlivě nezjistili nic nového. Ve skutečnosti jsme si však přichystali velmi účinný nástroj, pomocí něhož lze řešit i pokročilé úlohy. Dvě z nich detailně probereme v tomto odstavci.

Dříve, než se jimi budeme zabývat, shrňme poznatky, které jsme do této chvíle získali: Integrál

$$\int_{x_0}^{x_1} f(q, q') dx, \quad (1.249)$$

kde  $f$  je libovolná integrovatelná funkce, jejíž argumenty jsou libovolná funkce  $q(x)$  a její derivace  $q'(x) \equiv dq/dx$ , obě spojitě na intervalu  $x_0 < x < x_1$ , nabývá extrémní hodnoty právě, když platí

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial q'} \right) = \frac{\partial f}{\partial q}. \quad (1.250)$$

Tento závěr je zřejmý z Eulerových-Lagrangeových rovnic (1.248) plynoucích z Hamiltonova principu (1.243), učiníme-li formální záměny  $L \rightarrow f$ ,  $t \rightarrow x$  a užijeme-li pouze jednu zobecněnou souřadnici  $q_1(t)$ , kterou nyní nahradíme funkcí  $q(x)$ . Zobecněná rychlost  $\dot{q}_1(t)$  je zde zřejmě reprezentována derivací funkce  $q$  podle  $x$ , kterou jsme označili  $q'(x)$ .

Všimněme si, že funkci  $f$  nepovažujeme za funkci explicitně závisící na  $x$ , neboli platí

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0. \quad (1.251)$$

To odpovídá případům mechanických soustav, jejichž Lagrangeova funkce explicitně nazávisí na  $t$ . V odst. 1.7.2 na str. 42 jsme zjistili, že v takových případech existuje první integrál pohybových rovnic vyjadřující, že integrál energie  $h$  definovaný vztahem (1.107) na str. 43 je konstantní, tj.

$$h \equiv \sum_{j=1}^M \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L = \text{konst.}$$

Učiníme-li popsanou záměnu označení ( $L \rightarrow f$ ,  $\dot{q}_1 \rightarrow q'$ ), první integrál rovnice (1.250) bude ve tvaru

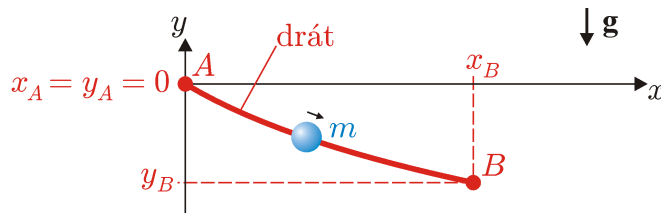
$$\frac{\partial f}{\partial q'} q' - f = \text{konst.} \quad (1.252)$$

Nyní již můžeme přistoupit k řešení úloh.

### 1.10.1 Brachistochrona

V tíhovém poli Země charakterizovaném tíhovým zrychlením  $\mathbf{g}$  máme mezi dvěma pevnými body  $A$  a  $B$  umístit drát takového tvaru, aby se kulička o hmotnosti  $m$ , jež je na něj navlečená a může po něm klouzat bez tření, přemístila z bodu  $A$  do  $B$  za nejkratší čas. V bodě  $A$  se kulička začíná pohybovat s nulovou počáteční rychlostí. Spojnice od bodu  $A$  k bodu  $B$  svírá s vektorem  $\mathbf{g}$  úhel větší než  $0$  a menší než  $90^\circ$ .

**Řešení:** Zvolíme kartézský souřadný systém<sup>42</sup> takový, že jeho počátek umístíme do bodu  $A$ , směr osy  $y$  zvolíme opačný k vektoru  $\mathbf{g}$  a směr osy  $x$  je takový, že se bod  $B$  nachází v rovině  $xy$ , viz obr. 1.35.



Obrázek 1.35: Geometrie zadání úlohy.

Křivku drátu budeme popisovat pomocí zatím neznámé funkce  $q$ , která určuje  $y$ -ovou polohu libovolného bodu drátu o dané  $x$ -ové poloze, tj.

$$y = q(x).$$

Pro obecnou polohu kuličky na drátu v libovolném okamžiku tedy platí

$$x \geq 0, \quad y = q(x) \leq 0, \quad z = 0.$$

Potenciální energie  $V$  kuličky je zřejmě

$$V = mgy = mgq(x).$$

Na kuličku působí konzervativní tíhová síla  $\mathbf{G} = m\mathbf{g}$  a normálová síla  $\mathbf{N}$  směřující kolmo k posunutí kuličky. Platí tedy zákon zachování mechanické energie kuličky a její hodnota je nyní rovna nule, neboť v bodě  $A$ , kde  $y = q(0) = 0$ , má kulička nulovou počáteční rychlost. Platí tedy

$$E = T + V = \frac{1}{2}mv^2 + mgq = 0 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{-2gq}.$$

Časový interval, který bude potřeba na přemístění kuličky po oblouku drátu infinitezimální délky  $dl$  je

$$dt = \frac{dl}{v} = \frac{dl}{\sqrt{-2gq}}.$$

Z kurzu analytické geometrie víme, že délka infinitezimálního oblouku grafu funkce  $q(x)$  se vyjádří následujícím vztahem

$$dl = dx \sqrt{1 + q'^2}, \quad (1.253)$$

<sup>42</sup>Osy tohoto souřadného systému budeme nyní pro lepší přehlednost označovat  $x$ ,  $y$  a  $z$  namísto obvyklého  $x_1$ ,  $x_2$  a  $x_3$ .

kde  $q' \equiv dq/dx$ . Pro časový interval  $dt$  tedy platí

$$dt = \frac{dl}{\sqrt{-2gq}} = dx \sqrt{\frac{1+q'^2}{-2gq}}.$$

Celkový čas, který kulička potřebuje na to, aby se přemístila z bodu  $A$  do bodu  $B$  je pak zřejmě určen integrálem

$$t = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{\frac{1+q'^2}{-2gq}} dx,$$

kde  $x_A = 0$  je  $x$ -ová poloha bodu  $A$  a  $x_B \neq 0$  je  $x$ -ová poloha bodu  $B$ . Zadání úlohy tedy zní: jaký je tvar drátu popsany funkcí  $q(x)$  takový, že jeho krajní body  $A$  a  $B$  jsou pevné a poslední integrál nabývá minimální hodnoty? Porovnáním tohoto zadání s integrálem (1.249), jehož extrémní hodnotu (minimum) jsme před tím hledali, zjišťujeme, že platí

$$f(q, q') = \sqrt{\frac{1+q'^2}{-2gq}}. \quad (1.254)$$

Integrál bude mít minimální hodnotu, právě když funkce  $q(x)$  bude řešením rovnice (1.250), tj.

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial q'} \right) = \frac{\partial f}{\partial q}.$$

Protože funkce  $f$  nezávisí na proměnné  $x$ , první integrál této rovnice představuje rovnice (1.252):

$$\frac{\partial f}{\partial q'} q' - f = K, \quad (1.255)$$

kde jsme zavedli namísto formálního „konst.“ integrační konstantu  $K$ . K sestavení prvního integrálu nejprve potřebujeme vyjádřit parciální derivaci funkce  $f$  podle  $q'$ , která podle jejího funkčního předpisu (1.254) vychází takto:

$$\frac{\partial f}{\partial q'} = \frac{q'}{\sqrt{-2gq(1+q'^2)}}.$$

První integrál (1.255) tedy bude následující:

$$\frac{q'^2}{\sqrt{-2gq(1+q'^2)}} - \sqrt{\frac{1+q'^2}{-2gq}} = K$$

a po drobných úpravách jej nalézáme ve tvaru

$$\frac{1}{\sqrt{1+q'^2}} = K \sqrt{-2gq}.$$

Odtud dalšími úpravami nakonec přicházíme k diferenciální rovnici

$$-2C = q(1+q'^2), \quad (1.256)$$

kde jsme namísto původní konstanty  $K$  zavedli novou kladnou konstantu  $C \equiv 1/(4gK^2)$ . Funkci  $q(x)$  získáme řešením rovnice (1.256), která je obyčejnou diferenciální rovnicí prvního

řádu. Jejím řešení se nyní budeme věnovat. Výraz v závorce nás inspiruje k tomu, že zavedeme parametr  $\alpha$  ve tvaru substituce

$$q' = \frac{dq}{dx} \equiv -\cotg(\alpha/2) = -\frac{\cos(\alpha/2)}{\sin(\alpha/2)}. \quad (1.257)$$

Po jejím dosazení zpět do diferenciální rovnice (1.256) dostáváme

$$-2C = q \left[ 1 + \frac{\cos^2(\alpha/2)}{\sin^2(\alpha/2)} \right] = q \frac{\sin^2(\alpha/2) + \cos^2(\alpha/2)}{\sin^2(\alpha/2)} = \frac{q}{\sin^2(\alpha/2)},$$

odkud získáváme závislost funkční hodnoty  $q$  na parametru  $\alpha$ :

$$q(\alpha) = -2C \sin^2(\alpha/2) = -C(1 - \cos \alpha). \quad (1.258)$$

Infinitesimální změnu  $dq$  způsobenou změnou  $\alpha$  o  $d\alpha$  vyjádříme jako diferenciál funkce  $q(\alpha)$ :

$$dq = -2C \sin(\alpha/2) \cos(\alpha/2) d\alpha.$$

Závislost proměnné  $x$  na parametru  $\alpha$  pak získáme dosazením  $dq$  do (1.257)

$$\frac{dq}{dx} = -\frac{2C \sin(\alpha/2) \cos(\alpha/2) d\alpha}{dx} = -\frac{\cos(\alpha/2)}{\sin(\alpha/2)} \Rightarrow dx = 2C \sin^2(\alpha/2) d\alpha$$

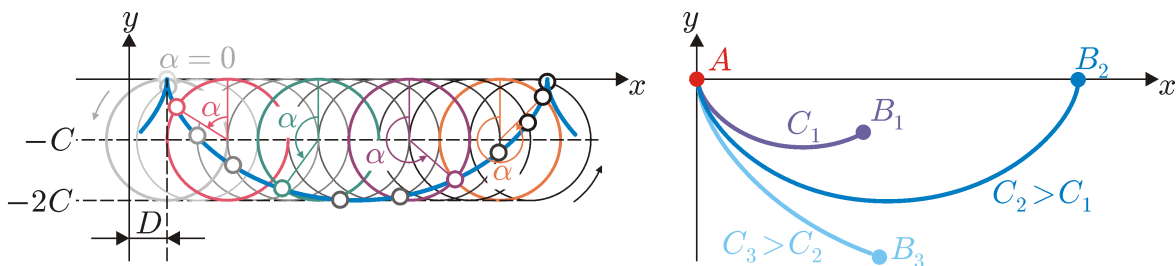
a následnou integrací:

$$x(\alpha) = \int 2C \sin^2(\alpha/2) d\alpha = C \int (1 + \cos \alpha) d\alpha = C(\alpha + \sin \alpha) + D, \quad (1.259)$$

kde  $D$  je druhá integrační konstanta. Protože funkční hodnota  $q(x)$  je rovna  $y$ -ové poloze každého bodu drátu, jeho křivka je dána parametricky podle vztahů (1.259) a (1.258), tj.

$$x(\alpha) = C(\alpha + \sin \alpha) + D, \quad q(\alpha) = y(\alpha) = -C(1 - \cos \alpha), \quad (1.260)$$

a takto vyjádřenou křivkou je část cykloidy, jejíž graf je ukázán na obrázku 1.36 vlevo.



Obrázek 1.36: Vlevo: Geometrická konstrukce cykloidy: Kružnice o poloměru  $C$  se odvaluje po ose  $x$ . Bod na jejím obvodu postupně prochází všemi body cykloidy. Vpravo: Příklady brachistochron pro různé polohy bodu  $B$  ( $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$ ). Bod  $B_1$  je „významně vpravo“ od bodu  $A$ , proto pozorujeme minimum brachistochrony. Bod  $B_2$  je umístěn do stejné výšky, jako bod  $A$ , brachistochrona nyní odpovídá celé periodě cykloidy. Minimum brachistochrony se neobjeví, pokud se bod  $B_3$  nachází „významně pod“ bodem  $A$ . Každá z uvedených brachistochron je dána určitou hodnotou konstanty  $C$ , jak je naznačeno.

Nyní ukážeme, jak se určí integrační konstanty  $C$  a  $D$ . Vzhledem k počátečnímu bodu  $A$  ( $x_A = y_A = 0$ ) platí

$$D = 0.$$

Integrační konstanta  $C$  závisí na polohovém vektoru  $(x_B, y_B, 0)$  bodu  $B$ , pro jehož složky platí:

$$x_B = x(\alpha_B) = C(\alpha_B + \sin \alpha_B), \quad y_B = y(\alpha_B) = -C(1 - \cos \alpha_B).$$

Řešením této soustavy dvou rovnic jsou hodnoty neznámých  $C$  a  $\alpha_B$ . Vzhledem k tomu, že první z rovnic je transcendentní, nelze tuto soustavu snadno řešit analyticky, ale např. numericky či grafickou metodou. My se omezíme pouze na závěr, že podle polohy bodu  $B$  existuje buď jedno, anebo žádné minimum křivky drátu, viz obr. 1.36 vpravo. Tím považujeme úlohu za vyřešenou.

Výsledná křivka této úlohy určená parametrickými rovnicemi (1.260), tj.

$$x(\alpha) = C(\alpha + \sin \alpha), \quad y(\alpha) = -C(1 - \cos \alpha),$$

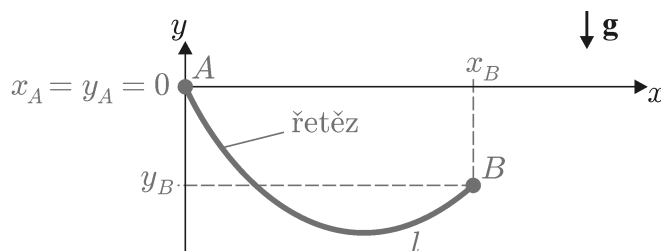
se nazývá *brachistochrona* a její název vznikl spojením řeckých slov  $\beta\rho\acute{\alpha}\chi\iota\sigma\tau\omicron\varsigma$   $\chi\rho\acute{o}\nu\omicron\varsigma$  [bráchtos chrónos] — nejkratší čas.

Poznamenejme ještě, že zadání této úlohy publikoval v roce 1696 Johann Bernoulli (1667–1748) a krom jeho samotného jsou považováni za její řešitele také Isaac Newton (1643–1727), Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716), Jacob Bernoulli (1655–1705), starší Johannův bratr, a Guillaume de l'Hospital (1661–1704).

### 1.10.2 Řetězovka

V tíhovém poli charakterizovaném tíhovým zrychlením  $\mathbf{g}$  mezi dvěma pevnými body  $A$  a  $B$  zavěsíme dokonale ohebný hmotný homogenní řetěz, jehož délku, která je větší než vzdálenost mezi body  $A$  a  $B$ , označíme  $l$ . Spojnice bodů  $A$  a  $B$  svírá s vektorem  $\mathbf{g}$  nenulový úhel. Určete tvar volně visícího řetězu.

**Řešení:** Zavedeme kartézský souřadný systém takový, že jeho počátek je totožný s bodem  $A$ , osa  $y$  směřuje opačným směrem než vektor  $\mathbf{g}$  a bod  $B$  se nachází v rovině  $xy$ , viz obr. 1.37.



Obrázek 1.37: Geometrie zadání úlohy.

Podobně jako v předchozí úloze budeme tvar řetězu popisovat pomocí křivky, jejíž body mají souřadnice  $x$  a  $y$  popsané (zatím neznámou) funkcí

$$y = q(x).$$

Délka infinitezimálního oblouku grafu funkce  $q(x)$  je

$$dl = \sqrt{1 + q'^2} dx,$$

jak jsme uvedli v předchozí úloze, viz (1.253). Pro délku řetězu tedy platí

$$l = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + q'^2} dx, \quad (1.261)$$

kde  $x_A = 0$  je  $x$ -ová poloha bodu  $A$  a  $x_B$  je  $x$ -ová poloha bodu  $B$ . Pro hledanou funkci  $q(x)$  dále platí, že visící řetěz zaujme nejnižší možnou hodnotu jeho potenciální energie. Zvolíme-li nulovou potenciální energii v rovině  $y = 0$ , každý element řetězu má potenciální energii

$$dV = dm gy = \tau gy dl = \tau g q(x) \sqrt{1 + q'^2} dx, \quad (1.262)$$

kde  $\tau$  je (konstantní) délková hustota řetězu. Potenciální energie řetězu je tedy určena integrálem

$$V = \int_{x_A}^{x_B} \tau g q \sqrt{1 + q'^2} dx \quad (1.263)$$

a budeme tudíž hledat takovou funkci  $q(x)$ , aby měl tento integrál minimální hodnotu. Zároveň však musí pro  $q(x)$  platit i podmínka délky řetězu (1.261). Princip nejmenší akce, který chceme pro vyřešení úlohy použít, však předpokládá pouze minimalizaci akce bez dalších podmínek. Bude tedy třeba podmínku (1.261) zahrnout do integrálu (1.263). To provedeme následujícím způsobem: Podmínka (1.261) říká, že

$$\int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + q'^2} dx - l = 0,$$

neboli výraz na levé straně se musí „co nejméně lišit od nuly“. Vynásobíme-li tuto rovnici zatím neznámým multiplifikátorem  $\lambda$ , můžeme ji sečíst s (1.263) a dostaneme

$$\begin{aligned} V &= \int_{x_A}^{x_B} \tau g q \sqrt{1 + q'^2} dx + \lambda \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + q'^2} dx - \lambda l = \\ &= \int_{x_A}^{x_B} (\tau g q + \lambda) \sqrt{1 + q'^2} dx - \lambda l. \end{aligned} \quad (1.264)$$

Vidíme, že multiplifikátor  $\lambda$  zde zajišťuje sčítání fyzikálních veličin majících stejné jednotky.<sup>43</sup> Pokud budeme hledat minimum potenciální energie v podobě vzorce (1.264), podmínka (1.261) je již automaticky zahrnuta. Takto určená potenciální energie je tedy akcí, kterou je třeba při hledání funkce  $q(x)$  minimalizovat. Pro „správný“ tvar  $q(x)$  tedy musí platit

$$\delta V = \delta \left[ \int_{x_A}^{x_B} (\tau g q + \lambda) \sqrt{1 + q'^2} dx - \lambda l \right] = \delta \int_{x_A}^{x_B} (\tau g q + \lambda) \sqrt{1 + q'^2} dx - \delta(\lambda l) = 0.$$

Protože  $\lambda$  i  $l$  jsou konstantami pro všechny funkce  $q(x)$ , které při hledání minima  $V$  procházíme, automaticky vždy platí

$$\delta(\lambda l) = 0. \quad (1.265)$$

Hledáme tedy minimum akce definované integrálem

$$\int_{x_A}^{x_B} \left( \tau g q + \lambda \sqrt{1 + q'^2} \right) dx,$$

<sup>43</sup>Multiplifikátor  $\lambda$  zde má zřejmě jednotku J/m.

jehož integrandem je funkce

$$f(q, q') = (\tau g q + \lambda) \sqrt{1 + q'^2} \quad (1.266)$$

a  $q(x)$  je řešením rovnice (1.250). Protože funkce  $f$  opět nezávisí na proměnné  $x$ , můžeme řešit první integrál podle (1.252):

$$\frac{\partial f}{\partial q'} q' - f = K \quad (1.267)$$

s integrační konstantou  $K$ . Parciální derivace funkce  $f$  definované funkčním předpisem (1.266) podle  $q'$  je následující:

$$\frac{\partial f}{\partial q'} = (\tau g q + \lambda) \frac{q'}{\sqrt{1 + q'^2}}.$$

Potom první integrál (1.267) je ve tvaru

$$(\tau g q + \lambda) \frac{q'^2}{\sqrt{1 + q'^2}} - (\tau g q + \lambda) \sqrt{1 + q'^2} = K.$$

Vynásobíme-li obě strany výrazem  $\sqrt{1 + q'^2}$ , dostáváme

$$- (\tau g q + \lambda) = K \sqrt{1 + q'^2}.$$

Dalšími drobnými úpravami potom získáme diferenciální rovnici

$$q + D = C \sqrt{1 + q'^2}, \quad (1.268)$$

v níž jsme zavedli nové konstanty  $C \equiv -K/(\tau g)$  a  $D \equiv \lambda/(\tau g)$ . Jejím řešením je hledaná funkce  $q(x)$ . Argument odmocniny a výraz na levé straně nás vedou k zavedení parametru  $u$  takto:<sup>44</sup>

$$q + D \equiv C \cosh u, \quad q' \equiv \sinh u. \quad (1.269)$$

Můžeme se totiž přesvědčit o tom, že po dosazení do diferenciální rovnice (1.268) se stále levá strana rovná pravé, neboť platí

$$\cosh u = \sqrt{1 + \sinh^2 u}. \quad (1.270)$$

Diferencováním první z rovnic (1.269) a užitím rovnice druhé dostáváme

$$dq = C \sinh u \, du = C q' \, du,$$

odkud

$$\frac{dq}{q'} = C \, du. \quad (1.271)$$

Vzhledem k tomu, že

$$q' = \frac{dq}{dx} \quad \Rightarrow \quad \frac{dq}{q'} = dx,$$

<sup>44</sup>Použité hyperbolické funkce jsou definovány následovně:

$$\cosh u \equiv \frac{1}{2} (e^u + e^{-u}), \quad \sinh u \equiv \frac{1}{2} (e^u - e^{-u})$$

a nazývají se pořadě *hyperbolický kosinus* a *hyperbolický sinus*. Vztahy mezi nimi ukážeme a použijeme v úloze 1.11.8.

rovnici (1.271) vyřešíme prostou integrací:

$$\frac{dq}{q'} = dx = Cdu \quad \Rightarrow \quad x = Cu + X,$$

kde  $X$  je další integrační konstanta. Odtud vyjádříme parametr  $u$ :

$$u = \frac{x - X}{C}$$

a dosadíme jej do první z rovnic (1.269). Tím získáváme funkci  $q(x)$  jako řešení diferenciální rovnice (1.268):

$$q(x) = C \cosh\left(\frac{x - X}{C}\right) - D. \quad (1.272)$$

Graf této funkce zároveň představuje křivku volně visícího řetězu. Tři konstanty se určí ze tří následujících podmínek: délka řetězu (1.261), tj.

$$l = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + q'^2} dx, \quad (1.273)$$

a polohy bodů  $A$  a  $B$ :

$$q(x_A) = y_A \quad \Rightarrow \quad C \cosh\left(\frac{x_A - X}{C}\right) - D = y_A, \quad (1.274)$$

$$q(x_B) = y_B \quad \Rightarrow \quad C \cosh\left(\frac{x_B - X}{C}\right) - D = y_B. \quad (1.275)$$

Vzhledem k tomu, že  $x_A = y_A = 0$  a funkce  $\cosh$  je sudá, podmínka (1.274) nabývá tvaru

$$D = C \cosh\left(\frac{X}{C}\right).$$

Derivaci funkce  $q(x)$ , jejíž funkční předpis je vyjádřen vztahem (1.272),

$$q' = \sinh\left(\frac{x - X}{C}\right)$$

dosadíme do podmínky (1.273) a dostáváme ji tak do tvaru

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{x_B} \sqrt{1 + \sinh^2\left(\frac{x - X}{C}\right)} dx = \int_0^{x_B} \cosh\left(\frac{x - X}{C}\right) dx = \\ &= C \sinh\left(\frac{x - X}{C}\right) \Big|_0^{x_B} = C \sinh\left(\frac{x_B - X}{C}\right) + C \sinh\left(\frac{X}{C}\right), \end{aligned}$$

neboť funkce  $\sinh$  je funkcí lichou. Podmínky (1.273) – (1.275) tak nalézáme v následujícím konečném tvaru

$$l = C \sinh\left(\frac{x_B - X}{C}\right) + C \sinh\left(\frac{X}{C}\right), \quad (1.276)$$

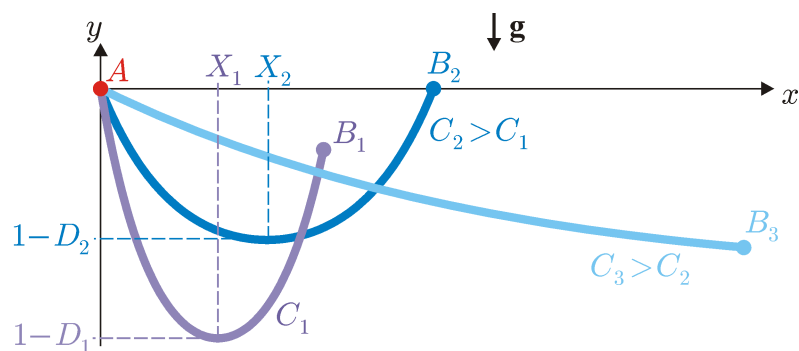
$$D = C \cosh\left(\frac{X}{C}\right), \quad (1.277)$$

$$y_B + D = C \cosh\left(\frac{x_B - X}{C}\right). \quad (1.278)$$



Tyto podmínky tvoří soustavu soustavu tří rovnic o třech neznámých konstantách  $C$ ,  $D$  a  $X$ , avšak tyto rovnice jsou transcendentní. Jejich řešení lze získat např. numericky či grafickou metodou, ale tím se již zabývat nebudeme.

Závěrem: Graf funkce  $q(x)$  dané funkčním předpisem (1.272) s příslušnými hodnotami konstant  $C$ ,  $D$  a  $X$  určených podmínkami (1.276) – (1.278) odpovídá křivce řetězu délky  $l$  zavěšeného v bodě  $A$  o souřadnicích  $(0, 0)$  a v bodě  $B$  o souřadnicích  $(x_B, y_B)$ . Tato úloha o volně visícím řetězu dala této křivce název: *řetězovka*. Na obr. 1.38 jsou ukázány příklady řetězovky pro různé vzájemné polohy bodů  $A$  a  $B$ , mezi kterými zavěšujeme stejný řetěz.



Obrázek 1.38: Příklady řetězovek shodných délek pro různé polohy bodu  $B$  ( $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$ ). Bod  $B_1$  je „blízko“ od bodu  $A$ , proto se objeví minimum řetězovky. Bod  $B_2$  je umístěn do stejné výšky, jako bod  $A$ . Minimum řetězovky nepozorujeme, pokud se bod  $B_3$  nachází „významně daleko“ od bodu  $A$ . Každá z uvedených řetězovek je charakterizována určitými hodnotami konstant  $C$ ,  $D$  a  $X$  určenými podmínkami (1.276) – (1.278), jak je naznačeno.

## 1.11 Kanonické rovnice

Již jsme se přesvědčili o tom, že Eulerovy-Lagrangeovy rovnice (viz (1.96) na str. 41) jsou velmi účinným nástrojem pro popis časového vývoje libovolné mechanické soustavy, na jejíž částice působí vtištěné konzervativní síly a síly holonomních vazeb. Víme též, že tyto pohybové rovnice představují soustavu  $M$  obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu, jejichž řešeními jsou zobecněné souřadnice  $q_j(t)$ , kde  $j = 1, 2, \dots, M$ .

Přestože jsme předložili některé efektivní metody, jak takové soustavy řešit, častěji se setkáváme s úlohami, jejichž závislosti zobecněných souřadnic na čase nelze analytickými metodami nalézt. V takových případech přicházejí na řadu nejrůznější numerické metody. Avšak Eulerovy-Lagrangeovy rovnice obecně obsahují krom všech zobecněných souřadnic  $q_j$  i jejich první derivace (zobecněné rychlosti)  $\dot{q}_j$  a dále i jejich druhé derivace  $\ddot{q}_j$ . Přibližná vyjádření těchto derivací pomocí diferencí, kterých se obvykle v numerických metodách používá, může vést k tomu, že použitý typ numerické metody konverguje „pomalu“ nebo dokonce nekonverguje vůbec. Tyto problémy se vyskytují zejména v případě přítomnosti numerických derivací druhého řádu. Podaří-li se nalézt pohybové rovnice v takovém tvaru, který by obsahoval pouze první derivace veličin, numerické integrace takových soustav diferenciálních rovnic prvního řádu budou účinnější. Nyní se tedy budeme věnovat snaze najít pohybové rovnice právě ve tvaru takových soustav diferenciálních rovnic prvního řádu.

### 1.11.1 Hamiltonova funkce

Připomeňme nejprve obecný integrál energie, který jsme vyjádřili vztahem (1.107) na str. 43:

$$h(q_j, \dot{q}_j, t) \equiv \sum_{j=1}^M \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L \quad (1.279)$$

a který, jak jsme zdůraznili, závisí na všech zobecněných souřadnicích  $q_j$ , všech zobecněných rychlostech  $\dot{q}_j$  a čase  $t$ . Nahradíme-li parciální derivaci Lagrangeovy funkce  $L$  podle zobecněné souřadnice  $\dot{q}_j$  zobecněnou hybností  $p_j$ , kterou jsme definovali pomocí vztahu (1.98) na str. 41, tj.

$$p_j \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \quad (j = 1, 2, \dots, M), \quad (1.280)$$

dostáváme *Hamiltonovu funkci* nebo *hamiltonian* definovanou takto:

$$H(q_j, p_j, t) \equiv \sum_{j=1}^M p_j \dot{q}_j - L. \quad (1.281)$$

Vidíme, že se integrál energie  $h$  a Hamiltonova funkce  $H$  od sebe liší pouze přechodem od souboru nezávislých proměnných  $(q_j, \dot{q}_j, t)$  k souboru nových nezávislých proměnných  $(q_j, p_j, t)$ .

Pozor! Aby byla Hamiltonova funkce definovaná vztahem (1.281) skutečně funkcí pouze těchto nových proměnných, i v samotné Lagrangeově funkci musíme provést náhradu

$$\dot{q}_j \rightarrow p_j \quad (j = 1, 2, \dots, M). \quad (1.282)$$

To znamená, že je třeba najít, jak závisí jednotlivé zobecněné souřadnice  $\dot{q}_j$  na všech zobecněných hybnostech  $p_j$ , neboli rovnice (1.280) převedeme do tvaru

$$\dot{q}_j = \dot{q}_j(q_j, p_j, t) \quad (j = 1, 2, \dots, M).$$

V Lagrangeově funkci  $L$  dále za  $\dot{q}_j$  dosadíme a teprve potom ji můžeme použít pro vyjádření Hamiltonovy funkce pomocí definice (1.281).

### 1.11.2 Nalezení kanonických rovnic

Víme-li, že Hamiltonova funkce závisí na proměnných  $q_j$ ,  $p_j$  a  $t$ , můžeme vyjádřit její totální diferenciál:

$$dH = \sum_{j=1}^M \left( \frac{\partial H}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial H}{\partial p_j} dp_j \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt. \quad (1.283)$$

Ten však můžeme získat i přímo z její definice (1.281), kde pro tuto chvíli ponecháme v Lagrangeově funkci zobecněné rychlosti  $\dot{q}_j$ :

$$dH = \sum_{j=1}^M \left( p_j d\dot{q}_j + \dot{q}_j dp_j - \frac{\partial L}{\partial q_j} dq_j - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} d\dot{q}_j \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (1.284)$$

Podle Eulerových-Lagrangeových rovnic (1.96) na str. 41 však platí

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) = \frac{dp_j}{dt} \equiv \dot{p}_j \quad (j = 1, 2, \dots, M)$$

a podobně výraz  $\partial L / \partial \dot{q}_j$  můžeme přímo nahradit zobecněnou hybností  $p_j$ . Po dosazení za obě parciální derivace do totálního diferenciálu (1.284) potom dostáváme

$$dH = \sum_{j=1}^M (p_j d\dot{q}_j + \dot{q}_j dp_j - \dot{p}_j dq_j - p_j d\dot{q}_j) - \frac{\partial L}{\partial t} dt = \sum_{j=1}^M (\dot{q}_j dp_j - \dot{p}_j dq_j) - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (1.285)$$

Protože všechny proměnné  $q_j$  a  $p_j$  jsou nezávislé, provnáním členů stojících u  $dq_j$  a  $d\dot{q}_j$  v (1.283) a (1.285) dostáváme následující rovnice:

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2, \dots, M). \quad (1.286)$$

Představují  $2M$  obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu, neboť se zde vyskytují nejvýše první derivace proměnných  $q_j$  a  $p_j$ . Podařilo se nám tedy snížit řád diferenciálních rovnic. Cena, kterou za to platíme, je zdvojnásobení počtu rovnic spolu se zdvojnásobením počtu neznámých funkcí  $q_j(t)$  a  $p_j(t)$ . Vzhledem k současným možnostem výpočetní techniky, však tato cena není vůbec vysoká.

Rovnice (1.286) se nazývají *Hamiltonovy kanonické rovnice* nebo zkráceně *kanonické rovnice* a jsou hledanými pohybovými rovnicemi tvořícími soustavu diferenciálních rovnic prvního řádu. Rovnice vlevo nemají fyzikální obsah, ale jsou ve své podstatě definičními rovnicemi pro všechny hybnosti  $p_j$ . Naopak fyzikální obsah mají rovnice vpravo, neboť jsou svojí stavbou ekvivalentní pohybovým rovnicím. Vidíme, že oba typy rovnic až na znaménko vykazují symetrii: na pravých stranách se vyskytují parciální derivace Hamiltonovy funkce  $H$  podle jedné z proměnných  $q_j$  nebo  $p_j$ , levé strany obsahují časové derivace té druhé proměnné. Z toho důvodu se dvojice proměnných  $q_j$  a  $p_j$  pro každé  $j$  nazývají *kanonicky sdružené*.

Příklad, jak lze sestavit pohybové rovnice konkrétní mechanické soustavy pomocí kanonických rovnic, ukážeme dále.

Zbývá ještě porovnat členy stojící u  $dt$ , čímž dostáváme relaci

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \quad (1.287)$$

Ve vztahu (1.106) na str. 43 dále opět provedeme náhradu  $\partial L/\partial \dot{q}_j$  za  $p_j$ :

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_{j=1}^M p_j \dot{q}_j - L \right) = \frac{dH}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

a porovnáním tohoto vztahu s (1.287) potom zjišťujeme, že platí

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (1.288)$$

Víme, že totální a partiální derivace funkcí se obecně liší. V tomto speciálním případě se však totální i partiální časové derivace Hamiltonovy funkce rovnají. Tato vlastnost poukazuje na výjimečnost této veličiny.

### 1.11.3 Kanonické transformace

Tvar Hamiltonovy funkce mnohých mechanických soustav vede na řešení soustavy poměrně složitých diferenciálních rovnic. Pokud bychom však vyšli z jiného tvaru Hamiltonovy funkce, diferenciální rovnice by se mohly zjednodušit. Dokonce se ukazuje, že můžeme sestavit nekonečně mnoho Hamiltonových funkcí popisujících danou mechanickou soustavu. Avšak každá taková „nová“ Hamiltonova funkce  $H'$  je funkcí „nových“ proměnných  $Q_k$  a  $P_k$ , kde  $k = 1, 2, \dots, M$ . Vzhledem k tomu, že tyto proměnné mohou mít libovolnou fyzikální jednotku, již není možné je nadále obecně nazývat zobecněnými souřadnicemi a zobecněnými hybnostmi.

Přechod od „starých“ k „novým“ proměnným představují obecné transformační rovnice

$$Q_k = Q_k(q_j, p_j, t), \quad P_k = P_k(q_j, p_j, t), \quad (k = 1, 2, \dots, M), \quad (1.289)$$

popř. inverzní transformační rovnice

$$q_j = q_j(Q_k, P_k, t), \quad p_j = p_j(Q_k, P_k, t) \quad (j = 1, 2, \dots, M). \quad (1.290)$$

„Starou“ Lagrangeovu funkci  $L$  „starých“ proměnných  $q_j$  a  $p_j$  vyjádříme pomocí (1.281) takto:

$$L(q_j, p_j, t) = \sum_{j=1}^M p_j \dot{q}_j - H(q_j, p_j, t). \quad (1.291)$$

Analogicky „novou“ Lagrangeovu funkci  $L'$  „nových“ proměnných  $Q_k$  a  $P_k$  pak napíšeme následujícím způsobem:

$$L'(Q_k, P_k, t) = \sum_{k=1}^M P_k \dot{Q}_k - H'(Q_k, P_k, t). \quad (1.292)$$

Dosadíme-li vyjádření (1.291) do Hamiltonova principu (1.243), dostáváme

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L(q_j, p_j, t) dt = 0. \quad (1.293)$$

Obdobně můžeme Hamiltonův princip napsat i pro „novou“ Lagrangeovu funkci (1.292):

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L'(Q_k, P_k, t) dt = 0. \quad (1.294)$$

Uvažujme o nejrůznějších transformačních rovnicích (1.289) a (1.290) a hledejme pouze takové, kdy oba integrály v (1.293) a (1.294) nabývají své stacionární hodnoty (minima) „zároveň“. Pokud tomu tak je, transformačním rovnicím říkáme *kanonické transformace*.

Jak takovou kanonickou transformaci nalezneme? Ukážeme, že pokud se obě Lagrangeovy funkce  $L$  a  $L'$  liší o totální časovou derivaci nějaké funkce  $F$ , oba integrály nabývají minima „současně“ neboli platí (1.293), pokud zároveň platí (1.294) a naopak. Pokládáme tedy

$$L(q_j, p_j, t) = L'(Q_k, P_k, t) + \frac{dF}{dt}. \quad (1.295)$$

O funkci  $F$  předpokládáme, že je funkcí  $q_j$ ,  $Q_k$  a  $t$ , tedy „starých“ proměnných  $q_j$  ( $j = 1, 2, \dots, M$ ), „nových“ proměnných  $Q_k$  ( $k = 1, 2, \dots, M$ ) a času,<sup>45</sup> tj.

$$F = F(q_j, Q_k, t). \quad (1.296)$$

Dále její variace je v „krajních časech“ nulová, neboli pro ni platí

$$\delta F [q_j(t_1), Q_k(t_1), t_1] = \delta F [q_j(t_2), Q_k(t_2), t_2] = 0. \quad (1.297)$$

Po dosazení (1.295) do (1.293) potom dostáváme

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L(q_j, p_j, t) dt = \delta \int_{t_0}^{t_1} \left[ L'(Q_k, P_k, t) + \frac{dF}{dt} \right] dt = 0. \quad (1.298)$$

Variace i integrál jsou lineárními operacemi, což znamená, že variace nebo integrál součtu je součet variací nebo integrálů. Pokud dále zaměníme pořadí variace, integrace a derivace, levá strana této rovnice nabývá tvaru

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L'(Q_k, P_k, t) dt + \delta \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{dF}{dt} \right) dt = \delta \int_{t_0}^{t_1} L'(Q_k, P_k, t) dt + \delta F|_{t_0}^{t_1}.$$

Vzhledem k (1.297) je vztah (1.298) následující:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L(q_j, p_j, t) dt = \delta \int_{t_0}^{t_1} L'(Q_k, P_k, t) dt = 0.$$

Tento výsledek říká to, co jsme na začátku předpověděli: Pokud integrál s Langrangeovou funkcí  $L$  nabývá minima, potom současně i integrál s Langrangeovou funkcí  $L'$  nabývá minima a naopak. Samozřejmě není nutné, aby se hodnoty obou integrálů rovnaly.

Dosadíme-li nyní vztahy (1.291) a (1.292) do (1.295), dostáváme

$$\sum_{j=1}^M p_j \dot{q}_j - H = \sum_{j=k}^M P_k \dot{Q}_k - H' + \frac{dF}{dt}. \quad (1.299)$$

Chceme-li rozepsat totální derivaci  $F$  podle času, pak vzhledem k (1.296) dostáváme

$$\frac{dF}{dt} = \sum_{j=1}^M \frac{\partial F}{\partial q_j} \dot{q}_j + \sum_{k=1}^M \frac{\partial F}{\partial Q_k} \dot{Q}_k + \frac{\partial F}{\partial t}. \quad (1.300)$$

<sup>45</sup>Funkci  $F$  se říká *vytvorující funkce*, protože vlastně právě na ni je postaveno hledání kanonických transformací. Využívají se především závislosti  $F$  na polovině „starých“ proměnných a polovině „nových“ proměnných, tj. symbolicky  $q, Q; p, Q; q, P; p, P$ . V tomto textu se nebudeme obecnými postupy hledání kanonických transformací zabývat, proto jsme pro ukázkou zvolili pouze závislost typu  $q, Q$ . Detailní popis, jak postupovat v dalších případech je uveden např. v knize M. Brdička, A. Hladík: *Teoretická mechanika*. Academia, Praha 1987, kap. 3, odst. 3.11.

Po jejím dosazení do rovnice (1.299) můžeme tuto rovnici po drobných úpravách přepsat do tvaru

$$\sum_{j=1}^M \left( p_j - \frac{\partial F}{\partial q_j} \right) \dot{q}_j - \sum_{k=1}^M \left( P_k + \frac{\partial F}{\partial Q_k} \right) \dot{Q}_k + \left( H' - H - \frac{\partial F}{\partial t} \right) = 0.$$

Vzhledem k nezávislosti  $q_j$  a  $Q_k$  musí být všechny závorky zvlášť rovny nule, tedy:

$$p_j = \frac{\partial F}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2, \dots, M), \quad (1.301)$$

$$P_k = \frac{\partial F}{\partial Q_k} \quad (k = 1, 2, \dots, M), \quad (1.302)$$

$$H' = H + \frac{\partial F}{\partial t}. \quad (1.303)$$

Tyto rovnice představují transformační rovnice mezi „starými“ a „novými“ proměnnými.

Konkrétní příklady hledání nejrůznějších kanonických transformací však v tomto textu popisovat nebudeme. V dalším se dále omezíme pouze na takové funkce  $F$ , které nejsou explicitní funkcí času,<sup>46</sup> tj.

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 0.$$

Podle (1.303) to znamená, že

$$H' = H. \quad (1.304)$$

S tímto předpokladem obě strany rovnice (1.299) vynásobíme  $dt$  a dostáváme

$$\sum_{j=1}^M p_j dq_j - \sum_{k=1}^M P_k dQ_k = dF. \quad (1.305)$$

Levá strana tedy musí být totálním diferenciálem. Toto je jiná forma podmínky, pomocí které můžeme ověřit, zda přechod od „starých“ k „novým“ proměnným je opravdu kanonickou transformací.

Vše, co jsme se zatím v tomto odstavci 1.11 dozvěděli, ukážeme na následujícím jednoduchém příkladu harmonického oscilátoru.

#### 1.11.4 Harmonický oscilátor (podruhé)

Zadání této úlohy je uvedeno v úloze 1.8.1 na str. 46. Zde jsme zjistili, že tato mechanická soustava má jeden stupeň volnosti. To znamená, že její pohybový stav je určen jednou zobecněnou souřadnicí, kterou jsme nazvali  $x_1$ . Kvůli lepší orientaci při inspiraci předchozím textem budeme tuto zobecněnou souřadnici nyní označovat  $q$ . Lagrangeovu funkci  $L$  harmonického oscilátoru jsme rovněž sestavili v úloze 1.8.1, viz (1.122) na str. 47, přičemž nezapomínáme na nové označení zobecněné souřadnice:

$$L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2. \quad (1.306)$$

<sup>46</sup>Těmto kanonickým transformacím se někdy říká *užší kanonické transformace*.

### • Nalezení Hamiltonovy funkce

Hledání Hamiltonovy funkce jsme obecně popsali v odst. 1.11.1 na str. 106. Nejprve napíšeme integrál energie harmonického oscilátoru, viz (1.279):

$$h = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} - L = m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + \frac{1}{2}kq^2 = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + \frac{1}{2}kq^2. \quad (1.307)$$

Dále zavedeme zobecněnou hybnost podle (1.280):

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q} \quad (1.308)$$

a v integrálu energie (1.307) provedeme náhradu  $\dot{q} \rightarrow p$ , viz (1.282). Zde je situace velmi jednoduchá, neboť z (1.308) přímo plyne

$$\dot{q} = \frac{p}{m}. \quad (1.309)$$

Tím přecházíme od souboru nezávislých proměnných  $(q, \dot{q}, t)$  k souboru nezávislých proměnných  $(q, p, t)$  a integrál energie (1.307) se tak stává Hamiltonovou funkcí:

$$h = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + \frac{1}{2}kq^2 \quad \Rightarrow \quad H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2. \quad (1.310)$$

### • Kanonické rovnice

Postup sestavení pohybové rovnice popisující pohyb harmonického oscilátoru jsme již ukázali v odst. 1.11.1. Pokud se však zajímáme o hledání časového vývoje pohybového stavu harmonického oscilátoru pomocí kanonických rovnic (1.286), dostáváme je ve tvaru

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -kq. \quad (1.311)$$

Rovnice vlevo je skutečně definiční, protože říká jaký je vztah mezi  $\dot{q}$  a  $p$  a nepřekvapuje nás, že je totožná s rovnicí (1.309). Rovnice vpravo má fyzikální obsah, neboť dosadíme-li za  $p$  z definiční rovnice vlevo, dostáváme

$$m\ddot{q} = -kq, \quad (1.312)$$

což je podle očekávání stejná pohybová rovnice, kterou jsme dostali z Eulerových-Lagrangeových rovnic, viz (1.123) na str. 48. Její řešení jsme již detailně probrali v odst. 1.11.1 a proto se jí dále nebudeme zabývat. Ukážeme však, že existuje ještě jiný postup, jak určit časový vývoj pohybového stavu harmonického oscilátoru, aniž bychom řešili tuto pohybovou rovnici.

### • Řešení pomocí kanonické transformace

Tvar „staré“ Hamiltonovy funkce (1.310) by nás mohl při přechodu od „starých“ proměnných  $q$  a  $p$  k „novým“ proměnným  $Q$  a  $P$  inspirovat tak, že by „nová“ Hamiltonova funkce mohla být jednoduše

$$H' = \sqrt{\frac{k}{m}} P. \quad (1.313)$$

Dále předpokládáme  $H' = H$ , viz (1.304). Snadno potom ověříme, že ke splnění těchto předpokladů musí platit následující inverzní transformační rovnice (1.290) mezi „starými“ a „novými“ proměnnými

$$q = \left(\frac{k}{m}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{2P}{k}} \sin Q, \quad p = \left(\frac{k}{m}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{2mP} \cos Q. \quad (1.314)$$

Musíme se však ještě přesvědčit o tom, že tento přechod od „starých“ proměnných k „novým“ proměnným je skutečně kanonickou transformací. K tomu nám slouží podmínka (1.305), která má zde tvar

$$p dq - P dQ = dF, \quad (1.315)$$

kde funkce  $F$  je zřejmě funkcí „staré“ proměnné  $q$  a „nové“ proměnné  $Q$ . Vyjádříme-li diferenciál  $dq$  z první inverzní transformační rovnice (1.314):

$$dq = \left(\frac{k}{m}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{1}{2Pk}} \sin Q dP + \left(\frac{k}{m}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{2P}{k}} \cos Q dQ$$

a dosadíme-li ji spolu s druhou inverzní transformační rovnicí (1.314) do podmínky (1.315), dostáváme

$$\left(\frac{k}{m}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{2mP} \cos Q \left[ \left(\frac{k}{m}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{1}{2kP}} \sin Q dP + \left(\frac{k}{m}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{2P}{k}} \cos Q dQ \right] - P dQ = dF.$$

Po dalších drobných úpravách ji nakonec nalézáme ve tvaru

$$\sin Q \cos Q dP + P (2 \cos^2 Q - 1) dQ = dF.$$

Aby byla levá strana opravdu totální derivací funkce  $F$ , musí platit

$$\frac{\partial F}{\partial P} = \sin Q \cos Q = \frac{1}{2} \sin(2Q), \quad \frac{\partial F}{\partial Q} = P (2 \cos^2 Q - 1) = P \cos(2Q),$$

neboť, jak víme,

$$dF = \frac{\partial F}{\partial Q} dQ + \frac{\partial F}{\partial P} dP.$$

Integrací potom zjistíme, že funkce  $F$  musí mít funkční předpis

$$F = \frac{1}{2} P \sin(2Q).$$

Předpokládali jsme však, že funkce  $F$  je funkcí „staré“ proměnné  $q$  a „nové“ proměnné  $Q$ . Proto do jejího funkčního předpisu dosadíme za  $P$  z první inverzní transformační rovnice (1.314) a po dalších úpravách ji dostáváme v konečném tvaru

$$F = \frac{1}{2} \sqrt{mk} q^2 \cotg Q.$$

Funkci  $F$  však nebylo potřeba nalézt, stačilo pouze dokázat, že je splněna podmínka (1.315), zajišťující kanoničnost transformace.



• Řešení „nových“ kanonických rovnic

Nyní již můžeme napsat „nové“ kanonické rovnice (1.311) vycházející z „nové“ Hamiltonovy funkce  $H'$  určené vztahem (1.313):

$$\dot{Q} = \frac{\partial H'}{\partial P} = \sqrt{\frac{k}{m}} \equiv \Omega, \quad \dot{P} = -\frac{\partial H'}{\partial Q} = 0. \quad (1.316)$$

Vidíme, že jejich řešení je nyní velmi snadné:

$$Q = \Omega t + \phi, \quad P = \text{konst.}, \quad (1.317)$$

kde  $\phi$  je integrační konstanta. Nejprve se zamyslíme nad druhým výsledkem. Z odst. 1.8.1 víme, že v případě harmonického oscilátoru je integrál energie  $h$  konstantní a ten je roven mechanické energii  $E$  oscilátoru, viz vztah (1.133) na str. 49. Avšak integrál energie přešel ve „starou“ Hamiltonovu funkci  $H$ , která je podle (1.304) dále rovna „nové“ Hamiltonově funkci  $H'$ . Platí tedy

$$H' = H = E.$$

Užitím (1.313) tak můžeme proměnnou  $P$  vyjádřit pomocí mechanické energie  $E$  takto:

$$P = \sqrt{\frac{m}{k}} H' = \frac{E}{\Omega}. \quad (1.318)$$

První z výsledků (1.317) potom dosadíme do první z inverzních transformačních rovnic (1.314) a užijeme vztahu (1.318):

$$q = \left(\frac{k}{m}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{2E}{k\Omega}} \sin(\Omega t + \phi) = \sqrt{\frac{2E}{k}} \sin(\Omega t + \phi).$$

Vidíme, že zde vystupují dvě integrační konstanty. Jednou je  $\phi$ , které se objevilo integrací  $\dot{Q}$ , druhou se stala mechanická energie  $E$  prostřednictvím konstantního  $P$ . Nyní  $E$  nahradíme maximální výchylkou  $A$ , mezi kterými platí vztah

$$E = \frac{1}{2}kA^2,$$

jak jsme zjistili v samém závěru odst. 1.8.1, viz vztah (1.134) na str. 49. Výchylky harmonického oscilátoru jsou pak určeny „starou“ zobecněnou souřadnicí

$$q(t) = A \sin(\Omega t + \phi) \quad (1.319)$$

se dvěma integračními konstantami  $A$  a  $\phi$ . Stejný výsledek jsme již dostali při řešení pohybu harmonického oscilátoru, jak ukazuje vztah (1.125) na str. 48.

Kanonickou transformací od „starých“ proměnných  $q$  a  $p$  k „novým“ proměnným  $Q$  a  $P$  jsme si velmi usnadnili řešení samotných pohybových rovnic. Ty jsme získali z kanonických rovnic sestavených na základě „nové“ Hamiltonovy funkce  $H'$ . Jak jsme již dříve poznamenali, „nové“ proměnné nemůžeme obecně nadále nazývat zobecněnou souřadnicí a zobecněnou hybností. Podle prvního z výsledků (1.317) vidíme, že „nová“ proměnná  $Q$  je bezrozměrná a na základě vztahu (1.318) „nová“ proměnná  $P$  má fyzikální jednotku J·s.

### 1.11.5 Poissonovy závorky

Za stručnou zmínku stojí i formulace pohybových rovnic, kterou nyní ukážeme. Uvažujme o funkci  $f$ , která je funkcí všech zobecněných souřadnic  $q_j$ , všech zobecněných hybností  $p_j$  a času  $t$ , tj.  $f = f(q_j, p_j, t)$ . Totální derivace  $f$  podle času potom vyjde

$$\frac{df}{dt} = \sum_{j=1}^M \left( \frac{\partial f}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial f}{\partial p_j} \dot{p}_j \right) + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Pokud za  $\dot{q}_j$  a  $\dot{p}_j$  dosadíme z kanonických rovnic (1.286) na str. 107, které zde pro přehlednost znovu uvádíme:

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2, \dots, M), \quad (1.320)$$

můžeme tuto totální derivaci přepsat do následujícího tvaru:

$$\frac{df}{dt} = \sum_{j=1}^M \left( \frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j} \right) + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Výraz v sumě vykazuje jistou „symetrii“. Sestává ze dvou členů tvořených součinem parciálních derivací funkce  $f$  a funkce  $H$ . A dále proměnné, podle kterých se derivuje, jsou v obou členech zaměněné. Tato matematická formule se stala předmětem zkoumání zejména pro její vlastnosti z hlediska algebry. Nazývá se *Poissonova závorka* a značíme ji takto:

$$[f, H] \equiv \sum_{j=1}^M \left( \frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j} \right). \quad (1.321)$$

Totální derivaci funkce  $f$  podle času pak můžeme formálně vyjádřit jako

$$\frac{df}{dt} = [f, H] + \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (1.322)$$

Poissonovy závorky mají mnoho důležitých vlastností a tvoří tzv. *Lieovu algebru*. My zde ukážeme jen jejich základní vlastnosti. Mějme funkce  $f(q_j, p_j, t)$ ,  $u(q_j, p_j, t)$  a  $w(q_j, p_j, t)$  a konstanty  $a$  a  $b$ . Snadno si lze ověřit, že platí:

$$[f, f] = 0, \quad (1.323)$$

$$[f, a] = 0, \quad (1.324)$$

$$[u, v] = -[v, u], \quad (1.325)$$

$$[au + bv, w] = [au, w] + [bv, w], \quad (1.326)$$

$$[uv, w] = u[v, w] + v[u, w]. \quad (1.327)$$

Povšimněme si vztahů (1.323), (1.325) a (1.326). Připomínají nám vlastnosti vektorového součinu:  $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$ ;  $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$ ;  $(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) \times \mathbf{w} = a\mathbf{u} \times \mathbf{w} + b\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ . I vektorový součin totiž vytváří Lieovu algebru. Vztahy (1.324) a (1.327) mají původ v derivacích obsažených v Poissonových závorkách.

Z hlediska mechaniky jsou důležité tyto vztahy: Vzhledem k tomu, že všechna  $q_j$  a  $p_j$  považujeme za nezávislé, všechny parciální derivace nějaké zobecněné veličiny podle jiné zobecněné veličiny jsou rovny nule. Parciální derivace zobecněné veličiny podle téže zobecněné

veličiny jsou rovny jedné. Matematicky lze toto snadno zapsat pomocí Poissonových závorek následujícím způsobem:

$$[q_j, q_k] = \delta_{jk}, \quad [p_j, p_k] = \delta_{jk}, \quad [q_j, p_k] = [p_j, q_k] = 0 \quad (j, k = 1, 2, \dots, M),$$

kde  $\delta_{jk}$  je tzv. *Kroneckerův symbol* nebo častěji *Kroneckerovo delta*.<sup>47</sup> Z nezávislosti zobecněných veličin  $q_j$  a  $p_j$  dále platí

$$[f, q_j] = \sum_{k=1}^M \left( \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial q_j}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial q_j}{\partial q_k} \right) = -\frac{\partial f}{\partial p_j}, \quad (1.329)$$

$$[f, p_j] = \sum_{k=1}^M \left( \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial p_j}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial p_j}{\partial q_k} \right) = \frac{\partial f}{\partial q_j}. \quad (1.330)$$

Velmi důležité jsou Poissonovy závorky obsahující Hamiltonovu funkci  $H$ , jak již bylo ukázáno při jejich zavedení, viz vztah (1.321). Pokud  $f$  není explicitní funkcí času, tzn.  $\partial f / \partial t = 0$ , potom podle (1.322) platí:

$$\frac{df}{dt} \equiv \dot{f} = [f, H]. \quad (1.331)$$

Protože všechny zobecněné proměnné  $q_j$  a  $p_j$  a čas  $t$  považujeme za navzájem nezávislé,<sup>48</sup> do vztahu (1.331) můžeme za  $f$  postupně dosadit všechny zobecněné souřadnice  $q_j$  a zobecněné hybnosti  $p_j$ :

$$\dot{q}_j = [q_j, H], \quad \dot{p}_j = [p_j, H] \quad (j = 1, 2, \dots, M). \quad (1.332)$$

Avšak užitím (1.325) a záměnou  $f$  za  $H$  ve vztazích (1.329) a (1.330) dostáváme:

$$[q_j, H] = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad [p_j, H] = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2, \dots, M).$$

Tyto výsledky nás vedou ke zjištění, že vztahy (1.332) jsou vlastně jiným vyjádřením kano-nických rovnic (1.320) pomocí Poissonových závorek.

Pokud je funkce  $f$  prvním integrálem pohybových rovnic, znamená to, že je konstantní a její totální derivace podle času je tudíž rovna nule. Podle (1.322) potom platí:

$$[f, H] = -\frac{\partial f}{\partial t}. \quad (1.333)$$

Zjistíme-li například, že zobecněná souřadnice  $q_j$  je cyklickou souřadnicí, příslušná zobecněná hybnost  $p_j$  se zachovává, neboli  $\dot{p}_j = 0$ . Potom podle (1.333) platí

$$[p_j, H] = -\frac{\partial p_j}{\partial t}.$$

Můžeme tedy říci, že všechny veličiny, které jsou prvním integrálem pohybových rovnic, splňují rovnici (1.333). O zákonu zachování hybnosti a cyklické souřadnici jsme se zmínili v odst. 1.7.1 na str. 41.

<sup>47</sup>Pro Kroneckerovo delta platí:

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & j \neq k. \end{cases} \quad (1.328)$$

<sup>48</sup>Máme tím na mysli, že jsou nezávislé prostřednictvím libovolných počátečních podmínek. Jakmile jsou počáteční podmínky jednou dány, tyto proměnné již na sobě závislé jsou, neboť popisují konkrétní časový vývoj pohybového stavu mechanické soustavy.

V případě, že první integrál  $f$  navíc nezávisí explicitně na čase ( $\partial f/\partial t = 0$ ), potom

$$[f, H] = 0. \quad (1.334)$$

Typickým příkladem této situace jsou mechanické soustavy popsané Lagrangeovou funkcí  $L$ , která není explicitně závislá na čase. V tom případě Hamiltonova funkce  $H$  rovněž explicitně nezávisí na čase, viz (1.287) na str. 107, a odtud dále plyne, že i totální derivace Hamiltonovy funkce podle času je nulová, jak vidíme ve vztahu (1.288) na téže straně. Položíme-li tedy  $f = H$  v (1.334), potom dostaneme výsledek

$$[H, H] = 0,$$

který známe z výčtu základních vlastností, viz (1.323).

V tomto textu jsme zařadili zmínku o Poissonových závorkách pouze pro seznámení se se základními vlastnostmi tohoto formalismu, aniž bychom výhody jeho použití ukázali na příkladu. Postačí, když shrneme přínos Poissonových závorek slovně:

Jak můžeme vytušit z předchozího textu, stěžejní výhodou Poissonových závorek je jistá „algebraizace“ úloh mechaniky, které jinak povětšinou řešíme výhradně metodami matematické analýzy. Proto zapojení Poissonových závorek se stává velmi účinným zejména tehdy, pokud využíváme výpočetní techniku a zároveň čistě analytické metody jsou již příliš komplikované.

Dalším nesporným přínosem Poissonových závorek je fakt, že podnětně připomínají komutační relace používané v kvantové mechanice. Představují tak jednu z předloh poskytovaných klasickou mechanikou, ze kterých se mohli inspirovat tvůrci kvantové teorie.

### 1.11.6 Konfigurační a fázový prostor

Jak jsme vysvětlili v předchozích odstavcích, při studiu pohybu mechanických soustav hledáme řešení pohybových rovnic nejrůznějšími postupy, jež nám poskytuje matematická analýza nebo někdy též i algebra, přičemž využíváme některých obecných fyzikálních principů, např. zákonů zachování či hledání minima nějakého funkcionálu. Ukážeme, že je užitečné se zabývat vývojem pohybového stavu mechanické soustavy i s využitím některých geometrických vlastností určitých trajektorií, které tyto soustavy charakterizují.

#### Konfigurační prostor

Vraťme se ještě jednou k pojmu trajektorie částice, kterou jsme popsali v odst. 1.4 na str. 17. Ta je určena křivkou tvořenou množinou bodů, jejichž polohové vektory mají složky rovny kartézským souřadnicím dané částice. Trajektorii  $n$ -té částice tedy udávají parametrické rovnice (1.28) na str. 18

$$x_{3n-2} = x_{3n-2}(t), \quad x_{3n-1} = x_{3n-1}(t), \quad x_{3n} = x_{3n}(t).$$

Tuto konstrukci však můžeme zobecnit na celou mechanickou soustavu tvořenou  $N$  částicemi následujícím způsobem: V  $3N$ -rozměrném prostoru definujeme ortogonální souřadný systém sestávající z  $3N$  (navzájem kolmých) os  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{3n-2}, x_{3n-1}, x_{3n}, \dots, x_{3N-2}, x_{3N-1}, x_{3N}$ . Pohybový stav mechanické soustavy je v daném okamžiku určen konkrétními hodnotami všech kartézských souřadnic  $x_i$ , které jsou v  $3N$ -rozměrném prostoru reprezentovány bodem  $(x_1, x_2, \dots, x_{3N})$ . Časový vývoj pohybového stavu je popsán tím, jak se jednotlivé kartézské

souřadnice mění. Bod v  $3N$ -rozměrném prostoru se v důsledku toho přemísťuje po určité křivce, která je určena následující soustavou  $3N$  parametrických rovnic:

$$x_1 = x_1(t), \quad x_2 = x_2(t), \quad x_3 = x_3(t), \quad \dots, \quad x_{3N} = x_{3N}(t).$$

V minulých odstavcích jsme zdůvodnili, že pro popis vývoje pohybového stavu je vhodné zavést  $M$  nezávislých zobecněných souřadnic  $q_j$ , pokud na částice mechanické soustavy působí holonomní vazby, které sníží celkový počet stupňů volnosti mechanické soustavy na  $M$ . Geometricky tedy můžeme časový vývoj pohybového stavu takové mechanické soustavy obdobně vyjádřit křivkou v  $M$ -rozměrném prostoru zavedením ortogonálního souřadného systému sestávajícího z  $M$  (navzájem kolmých) os  $q_1, q_2, \dots, q_M$ . Okamžitý pohybový stav potom udává bod  $(q_1, q_2, \dots, q_M) \equiv (q_j)$ , jehož poloha v  $M$ -rozměrném prostoru je určena konkrétními hodnotami zobecněných souřadnic. V čase se tento bod  $(q_j)$  přemísťuje po křivce zřejmě definované opět parametricky pomocí soustavy  $M$  rovnic

$$q_1 = q_1(t), \quad q_2 = q_2(t), \quad \dots, \quad q_M = q_M(t). \quad (1.335)$$

Takový  $M$ -rozměrný prostor s definovaným souřadným systémem tvořeným  $M$  osami  $q_j$  se nazývá *konfigurační prostor*. Křivka, po které se bod  $(q_j)$  přemísťuje, se nazývá *konfigurační trajektorie*.

### Fázový prostor

Zavedením Hamiltonovy funkce  $H$  definované vztahem (1.281) jsme našli kanonické rovnice (1.286), které představují alternativní popis vývoje pohybového stavu mechanické soustavy k pohybovým rovnicím reprezentovanými Eulerovými-Lagrangeovými rovnicemi (1.96) na str. 41. Jak víme, tento přístup vede k soustavě  $2M$  diferenciálních rovnic prvního řádu, jejíž řešením je  $2M$  funkcí  $q_j(t)$  a  $p_j(t)$ , kde  $j = 1, 2, \dots, M$ . Můžeme tedy v  $2M$  rozměrném prostoru zavést ortogonální souřadný systém sestávající z (navzájem kolmých) os  $q_1, q_2, \dots, q_M, p_1, p_2, \dots, p_M$ . Bod  $(q_1, q_2, \dots, q_M, p_1, p_2, \dots, p_M) \equiv (q_j, p_j)$  v tomto prostoru udává okamžité hodnoty všech zobecněných souřadnic  $q_j$  a všech zobecněných hybností  $p_j$ . Jak se pohybový stav mechanické soustavy v čase vyvíjí, tento bod se přemísťuje po jisté křivce. Prostoru o rozměru  $2M$  s definovaným ortogonálním souřadným systémem říkáme *fázový prostor* a křivka, po které se přemísťuje bod  $(q_j, p_j)$ , se nazývá *fázová trajektorie*.

Abychom mohli názorně ukázat základní vlastnosti fázové trajektorie, budeme se nyní zabývat pouze takovými mechanickými soustavami, které mají jeden stupeň volnosti<sup>49</sup> ( $M = 1$ ). Fázový prostor je tedy dvourozměrný a definujeme v něm ortogonální souřadný systém sestávající ze dvou (navzájem kolmých) os  $q$  a  $p$ . Popíšeme vztah mezi pohybovým stavem mechanické soustavy v daném okamžiku a pohybovým stavem v libovolném následujícím čase.

### Infinitezimální kanonická transformace

Nejprve se budeme zabývat tím, jak spolu souvisí stav mechanické soustavy v čase  $t$ , který je určen zobecněnou souřadnicí  $q(t)$  a zobecněnou hybností  $p(t)$ , a stav této mechanické soustavy o nekonečně malý časový interval  $\delta t$  později, kdy

$$q(t + \delta t) = q(t) + \delta q, \quad p(t + \delta t) = p(t) + \delta p. \quad (1.336)$$

<sup>49</sup>Závěry, ke kterým přijdeme v dalším textu, lze samozřejmě zobecnit i pro mechanické soustavy s libovolným počtem stupňů volnosti. Více lze najít např. v knize M. Brdička, A. Hladík: *Teoretická mechanika*. Academia, Praha 1987, kap. 3, odst. 3.11.3.-4. nebo L. D. Landau, E. M. Lifshitz: *Mechanics*. Course of Theoretical Physics. Elsevier 2010, §45–46.

Zkoumejme, zda přechod od dvojice proměnných  $q(t)$  a  $p(t)$  k dvojici  $q(t + \delta t)$  a  $p(t + \delta t)$  je kanonickou transformací. Těmito transformacemi jsme se zabývali v odst. 1.11.3 na str. 108. Tehdy jsme došli k závěru, že má-li být přechod od „starých“ proměnných  $q_j$  a  $p_j$  k „novým“ proměnným  $Q_k$  a  $P_k$  kanonickou transformací, musí platit podmínka (1.305). Nyní jsou „staré“ proměnné  $q(t)$  a  $p(t)$  a „nové“ proměnné  $q(t + \delta t)$  a  $p(t + \delta t)$  a podmínka (1.305) tedy má tvar

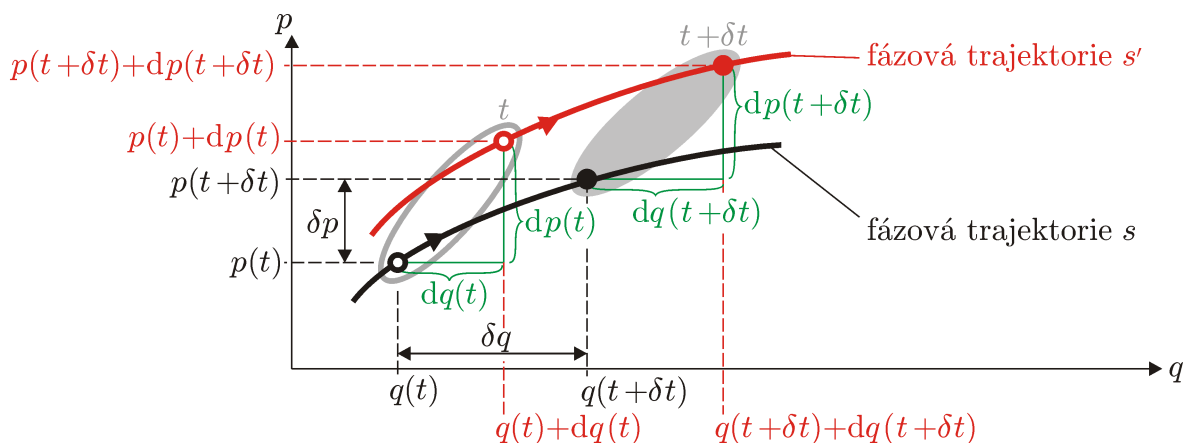
$$p(t) dq(t) - p(t + \delta t) dq(t + \delta t) = dF$$

neboli, užitím druhého vztahu (1.336),

$$p(t) dq(t) - [p(t) + \delta p] dq(t + \delta t) = dF. \quad (1.337)$$

Použití dvou typů označení infinitezimálních veličin „ $\delta$ “ a „ $d$ “ zde má důležitý význam, který vysvětlíme: Symbol „ $\delta$ “ byl užit ve vztazích (1.336). Znamená to, že mechanická soustava přejde ze stavu  $[q(t), p(t)]$  do stavu  $[q(t + \delta t), p(t + \delta t)]$  podle pohybové rovnice, kterou sestavíme např. pomocí Eulerovy-Lagrangeovy rovnice (1.96) nebo kanonických rovnic (1.286). Tento přechod probíhá „podél“ fázové trajektorie  $s$ .

Představme si však, že se vlivem trochu jiných počátečních podmínek mechanická soustava nachází ve stejném čase  $t$  v trochu jiném stavu  $[q(t) + dq(t), p(t) + dp(t)]$ , „na“ trochu jiné fázové trajektorii  $s'$ . Pohybová rovnice potom určí, že během stejného časového intervalu  $\delta t$  mechanická soustava přejde do stavu  $[q(t + \delta t) + dq(t + \delta t), p(t + \delta t) + dp(t + \delta t)]$ . Příklad obou fázových trajektorií spolu s popsánymi veličinami jsou ukázány na obr. 1.39.



Obrázek 1.39: V čase  $t$  je pohybový stav určen dvojicí proměnných  $[q(t), p(t)]$  (černý kroužek). Během infinitezimálního časového intervalu  $\delta t$  přejde do stavu  $[q(t + \delta t), p(t + \delta t)]$  (černý bod) „podél“ fázové trajektorie  $s$  (černá křivka). Kdyby se v čase  $t$  soustava nacházela v trochu jiném stavu  $[q(t) + dq(t), p(t) + dp(t)]$  (červený kroužek), potom by přešla během stejného časového intervalu  $\delta t$  do stavu  $[q(t + \delta t) + dq(t + \delta t), p(t + \delta t) + dp(t + \delta t)]$  (červený bod) „podél“ trochu jiné fázové trajektorie  $s'$  (červená křivka). Stavů, které nastávají ve stejných časech  $t$ , resp.  $t + \delta t$ , jsou spojeny prázdným, resp. plným, šedým oválem.

Jinými slovy řečeno: veličiny  $\delta t$ ,  $\delta q$  a  $\delta p$  jsou infinitezimálními veličinami, které považujeme za dané, zatímco veličiny  $dq(t)$  a  $dq(t + \delta t)$  jsou libovolné infinitezimální změny vstupující do podmínky kanoničnosti (1.337).

Diferencováním prvního ze vztahů (1.336) dostáváme

$$dq(t + \delta t) = dq(t) + d(\delta q).$$

Tento diferenciál spolu s druhým vztahem (1.336) dosadíme do podmínky kanoničnosti (1.337):

$$p(t) dq(t) - [p(t) + \delta p][dq(t) + d(\delta q)] = dF. \quad (1.338)$$

Po roznásobení závorek a vynechání  $\delta p d(\delta q)$  jako infinitezimální veličiny vyššího řádu dostáváme

$$- \delta p dq - p d(\delta q) = dF, \quad (1.339)$$

přičemž již explicitně nepíšeme, že veličny  $p$  a  $dq$  jsou funkcemi času  $t$ . Protože dále platí, že

$$d(p \delta q) = dp \delta q + p d(\delta q) \quad \Rightarrow \quad p d(\delta q) = d(p \delta q) - \delta q dp,$$

podmínka (1.339) nabývá tvaru

$$- \delta p dq - d(p \delta q) + \delta q dp = dF.$$

Diferenciál závorky můžeme převést na druhou stranu a zahrnout do diferenciálu  $dF$ . Potom dostáváme

$$- \delta p dq + \delta q dp = d(F + p \delta q) \equiv d\Phi \delta t. \quad (1.340)$$

Zde jsme zavedli novou funkci  $\Phi$ , jejíž diferenciál vynásobený  $\delta t$  je roven  $d(F + p \delta q)$ . To, že jsme  $d\Phi$  definovali zrovna tímto způsobem, využijeme v dalším kroku: Vydělíme-li totiž nyní obě strany rovnice (1.340) infinitezimálním časovým intervalem  $\delta t$ , dostáváme

$$- \dot{p} dq + \dot{q} dp = d\Phi, \quad (1.341)$$

neboť v našem označení infinitezimálních veličin platí:  $\delta q/\delta t = \dot{q}$  a  $\delta p/\delta t = \dot{p}$ . Pokud levá strana (1.341) má být rovna totálnímu diferenciálu funkce  $\Phi$ , pro parciální derivace této funkce to znamená, že

$$\frac{\partial \Phi}{\partial q} = -\dot{p}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial p} = \dot{q}. \quad (1.342)$$

Označíme-li  $\Phi \equiv H$ , poslední dvě rovnice jsou zřejmě nám již známými kanonickými rovnicemi (1.286) pro  $M = 1$ . Funkce  $\Phi$  (nebo  $H$ ) mající vlastnost (1.342) tedy existuje a tudíž dvojice  $[q(t), p(t)]$  a  $[q(t + \delta t), p(t + \delta t)]$  jsou vskutku svázány kanonickou transformací. Protože jde o veličiny, jejichž hodnoty byly zjištěny v nekonečně blízkých časech, takové kanonické transformaci říkáme *infinitezimální kanonická transformace*.

Na základě těchto zjištění můžeme na pohyb mechanické soustavy nahlížet též následujícím způsobem: Přechod jejího pohybového stavu v čase  $t$  do stavu v čase  $t + \delta t$  je popsán infinitezimální kanonickou transformací. Lze však ukázat, že transformace proměnných vzniklých ze dvou po sobě jdoucích kanonických transformací opět představuje kanonickou transformaci. Proto časový vývoj pohybového stavu během libovolného konečného časového intervalu  $\Delta t$  můžeme popsat jako postupnou sekvenci infinitezimálních kanonických transformací, přičemž přechod od počátečního stavu  $[q(t), p(t)]$  do koncového stavu  $[q(t + \Delta t), p(t + \Delta t)]$  je rovněž kanonickou transformací.

Toto samozřejmě platí i pro přechod od počátečního stavu mechanické soustavy určeného v čase  $t = 0$  stavem  $(q_0, p_0)$ , kde  $q_0 \equiv q(0)$  a  $p_0 \equiv p(0)$ , k libovolnému pozdějšímu stavu  $[q(t), p(t)]$  v čase  $t > 0$ . Tento závěr můžeme užitím matematického zápisu stručně vyjádřit takto: Přechod popsáný transformačními rovnicemi

$$q = q(q_0, p_0), \quad p = p(q_0, p_0) \quad (1.343)$$

je kanonickou transformací.

Tento závěr má však důležitý důsledek, kterému se nyní chceme věnovat v dalším textu.

**Zachování plošného elementu fázového prostoru**

Je-li transformace (1.343) kanonická, podle (1.305) musí platit:

$$p_0 dq_0 - p dq = dF. \quad (1.344)$$

Je zde vhodné upozornit na to, že na rozdíl od (1.337) podmínka (1.344) již nepopisuje pouhou infinitezimální kanonickou transformaci, nýbrž kanonickou transformaci z počátečního stavu  $(q_0, p_0)$  do libovolného budoucího stavu  $[q(t), p(t)]$ .

Po dosazení diferenciálu

$$dq = \frac{\partial q}{\partial q_0} dq_0 + \frac{\partial q}{\partial p_0} dp_0$$

první transformační rovnice (1.343) do podmínky (1.344) dostáváme

$$p_0 dq_0 - p \left( \frac{\partial q}{\partial q_0} dq_0 + \frac{\partial q}{\partial p_0} dp_0 \right) = dF,$$

odkud úpravou

$$\left( p_0 - p \frac{\partial q}{\partial q_0} \right) dq_0 - p \frac{\partial q}{\partial p_0} dp_0 = dF. \quad (1.345)$$

Protože levá strana této rovnice je rovna totálnímu diferenciálu funkce  $F$ , musí platit nám známé vztahy

$$\frac{\partial F}{\partial q_0} = \left( p_0 - p \frac{\partial q}{\partial q_0} \right), \quad \frac{\partial F}{\partial p_0} = -p \frac{\partial q}{\partial p_0}. \quad (1.346)$$

V každém bodě definičního oboru funkce  $F$ , ve kterém je tato funkce diferencovatelná, musí dále platit rovnost smíšených parciálních derivací

$$\frac{\partial}{\partial p_0} \left( \frac{\partial F}{\partial q_0} \right) = \frac{\partial}{\partial q_0} \left( \frac{\partial F}{\partial p_0} \right),$$

viz vztah (3.13) na str. 233 v Dodatku A. Budeme-li tedy první rovnici (1.346) parciálně derivovat podle  $p_0$  a druhou rovnici (1.346) parciálně derivovat podle  $q_0$ , oba výsledky se musí rovnat:

$$\frac{\partial p_0}{\partial p_0} - \frac{\partial q}{\partial q_0} \frac{\partial p}{\partial p_0} - p \frac{\partial}{\partial p_0} \left( \frac{\partial q}{\partial q_0} \right) = -\frac{\partial q}{\partial p_0} \frac{\partial p}{\partial q_0} - p \frac{\partial}{\partial q_0} \left( \frac{\partial q}{\partial p_0} \right). \quad (1.347)$$

Protože i funkci  $q(q_0, p_0)$  považujeme za diferencovatelnou, platí záměnnost jejich smíšených parciálních derivací

$$\frac{\partial}{\partial p_0} \left( \frac{\partial q}{\partial q_0} \right) = \frac{\partial}{\partial q_0} \left( \frac{\partial q}{\partial p_0} \right).$$

A dále samozřejmě platí:  $\partial p_0 / \partial p_0 = 1$ . Rovnici (1.347) tak nalzáme ve tvaru

$$\frac{\partial q}{\partial q_0} \frac{\partial p}{\partial p_0} - \frac{\partial q}{\partial p_0} \frac{\partial p}{\partial q_0} = 1.$$

Levá strana poslední rovnice nám připomíná determinant matice  $2 \times 2$ , který nazveme  $J$ . S jeho využitím potom můžeme tuto rovnici přepsat na tvar

$$J \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial q}{\partial q_0} & \frac{\partial q}{\partial p_0} \\ \frac{\partial p}{\partial q_0} & \frac{\partial p}{\partial p_0} \end{vmatrix} = \frac{\partial q}{\partial q_0} \frac{\partial p}{\partial p_0} - \frac{\partial q}{\partial p_0} \frac{\partial p}{\partial q_0} = 1. \quad (1.348)$$



Tento výsledek je velmi zajímavý. Determinant  $J$  se nazývá Jacobiho determinant (jacobian) transformace (1.343) a udává vztah mezi plošnými elementy fázového prostoru  $dq_0 dp_0$  a  $dq dp$ :

$$dq_0 dp_0 \longleftrightarrow J dq dp = dq dp, \quad (1.349)$$

jak známe např. z matematiky při transformaci souřadnic v případě výpočtů plošných integrálů.<sup>50</sup> Protože je Jacobiho matice za všech okolností rovna 1, plošné elementy fázového prostoru  $dq_0 dp_0$  a  $dq dp$  jsou vždy shodné. Říkáme, že se plošný element fázového prostoru<sup>51</sup> zachovává.

Toto tvrzení zaslouží širší komentář: Podobně, jako v předchozích výpočtech týkajících se infinitezimální kanonické transformace, počáteční podmínky  $q_0$  a  $p_0$  v čase  $t = 0$  spolu s pohybovými rovnicemi stanoví, že se bude časový vývoj pohybového stavu „přemisťovat“ podél dané fázové trajektorie  $s$ . Avšak počáteční podmínky  $q_0 + dq_0$  a  $p_0 + dp_0$  mohou způsobit, že pohybové stavy budou odpovídat trochu jiné fázové trajektorii  $s'$ . Zaměříme-li se potom na nějaký konkrétní časový okamžik  $t > 0$ , infinitezimální změny  $dq$  a  $dp$  vyjadřují, jak se v daném okamžiku liší  $q$  a  $p$ , „jde-li“ soustava podél fázové trajektorie  $s$  nebo podél  $s'$ . Vzhledem k tomu, že neustále platí  $dq dp = dq_0 dp_0$ , sousedící fázové trajektorie  $s$  a  $s'$  se nemohou časem libovolně „rozběhnout“. Bude-li se „více“ lišit pohybový stav mechanické soustavy v zobecněné souřadnici  $q$ , musí se „méně“ lišit v zobecněné hybnosti  $p$  a naopak.

### 1.11.7 Harmonický oscilátor (potřetí)

Zadání této úlohy je stále stejné jako v úloze 1.8.1 na str. 46. Možné postupy řešení jsme dále rozšířili v navazující úloze 1.11.4 na str. 110. Zde jsme zavedli označení pro zobecněnou souřadnici  $q$  a našli příslušnou zobecněnou hybnost

$$p = m\dot{q}, \quad (1.350)$$

viz (1.308). Pohybová rovnice nám vyšla ve tvaru (1.312), tj.

$$m\ddot{q} = -kq \quad \Rightarrow \quad \ddot{q} + \frac{k}{m}q = 0. \quad (1.351)$$

Jak jsme více způsoby ukázali, jejím řešením je funkce (1.319), kterou zde pro přehlednost znovu uvádíme:

$$q(t) = A \sin(\Omega t + \phi), \quad \text{kde} \quad \Omega \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (1.352)$$

<sup>50</sup>Jako jeden z příkladů, které známe ze základního kurzu matematiky, můžeme uvést přechod od kartézských souřadnic  $x, y$  k polárním souřadnicím  $r, \phi$ . Transformačními rovnicemi v tomto případě jsou

$$x(r, \phi) = r \cos \phi, \quad y(r, \phi) = r \sin \phi$$

a Jacobiho determinant pak vyjde následovně:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \phi & -r \sin \phi \\ \sin \phi & r \cos \phi \end{vmatrix} = r (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) = r.$$

Tím získáváme známý vztah mezi elementárními plochami

$$dx dy \longleftrightarrow r dr d\phi.$$

<sup>51</sup>V případě obecných mechanických systémů s  $M$  stupni volnosti používáme termín *objemový element fázového prostoru*.

Toto řešení obsahuje dvojici integračních konstant  $A$  a  $\phi$  a určí se z počátečních podmínek

$$q(0) = q_0, \quad p(0) = p_0, \quad (1.353)$$

jak jsme již ukázali v úloze 1.8.1.

### • Řešení pohybové rovnice

Z důvodu dalších výpočtů nyní vyjádříme řešení diferenciální rovnice (1.351) v jiném tvaru než (1.352):

$$q(t) = a \sin(\Omega t) + b \cos(\Omega t). \quad (1.354)$$

Zde opět zavádíme dvě integrační konstanty  $a$  a  $b$  namísto dřívějších  $A$  a  $\phi$ . Lze se přesvědčit o tom, že (1.354) je opravdu řešením pohybové rovnice (1.351) a zavedením vztahů  $a \equiv A \cos \phi$  a  $b \equiv A \sin \phi$  přejde funkce (1.354) na tvar (1.352).

Časový vývoj zobecněné hybnosti  $p$  pak určíme dosazením časové derivace (1.354) do vztahu (1.350):

$$p = m\dot{q} = m\Omega a \cos(\Omega t) - m\Omega b \sin(\Omega t). \quad (1.355)$$

Jako vždy, i nyní integrační konstanty  $a$  a  $b$  určíme z počátečních podmínek (1.353):

$$q(0) = b = q_0, \quad p(0) = m\Omega a = p_0,$$

odkud

$$b = q_0, \quad a = \frac{p_0}{m\Omega}.$$

Časový vývoj zobecněné souřadnice  $q(t)$  a zobecněné hybnosti  $p(t)$  tedy popisují následující dvě funkce:

$$q(t) = \frac{p_0}{m\Omega} \sin(\Omega t) + q_0 \cos(\Omega t), \quad p(t) = p_0 \cos(\Omega t) - m\Omega q_0 \sin(\Omega t). \quad (1.356)$$

### • Rovnice fázové trajektorie

Rovnici fázové trajektorie  $p(q)$  dostaneme eliminací času ze vztahů (1.356). Nejprve  $q(t)$  vynásobíme výrazem  $m\Omega$  a dále sečteme kvadráty obou vztahů. Užitím drobných úprav pak dostáváme

$$(m\Omega q)^2 + p^2 = [p_0 \sin(\Omega t) + m\Omega q_0 \cos(\Omega t)]^2 + [p_0 \cos(\Omega t) - m\Omega q_0 \sin(\Omega t)]^2 = p_0^2 + (m\Omega q_0)^2,$$

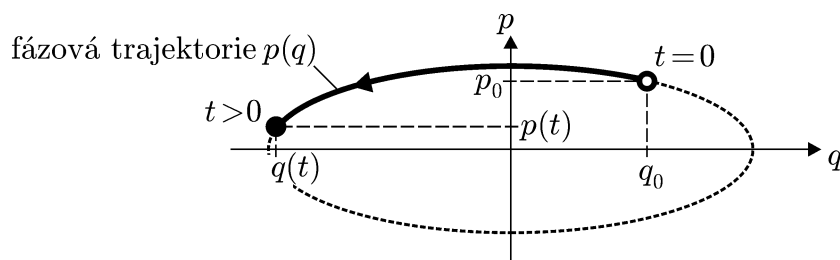
odkud

$$p(q) = \pm \sqrt{p_0^2 + (m\Omega q_0)^2 - (m\Omega q)^2}.$$

Po bližším prozkoumání grafu této funkce dojdeme k závěru, že fázovou trajektorií je elipsa, jejíž osy jsou rovnoběžné s osami  $q$  a  $p$ , viz obr. 1.40.

### • Vztah mezi plošnými elementy fázového prostoru

Jak jsme uvedli, vztah (1.349) udává převod mezi plošnými elementy fázového prostoru s použitím Jacobiho determinantu (1.348). Ten získáme dosazením za příslušné parciální derivace

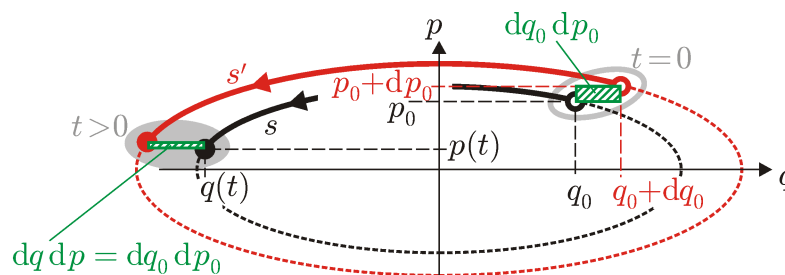


Obrázek 1.40: Fázová trajektorie  $p(q)$  harmonického oscilátoru ve tvaru elipsy s osami rovnoběžnými s osami  $q$  a  $p$ . V čase  $t = 0$  je pohybový stav určen počátečními podmínkami  $(q_0, p_0)$  (černý kroužek), v čase  $t > 0$  okamžitými hodnotami  $[q(t), p(t)]$  (černý bod).

funkcí (1.356):

$$J \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial q}{\partial q_0} & \frac{\partial p}{\partial q_0} \\ \frac{\partial q}{\partial p_0} & \frac{\partial p}{\partial p_0} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\Omega t) & \frac{1}{m\Omega} \sin(\Omega t) \\ -m\Omega \sin(\Omega t) & \cos(\Omega t) \end{vmatrix} = \cos^2(\Omega t) + \sin^2(\Omega t) = 1. \quad (1.357)$$

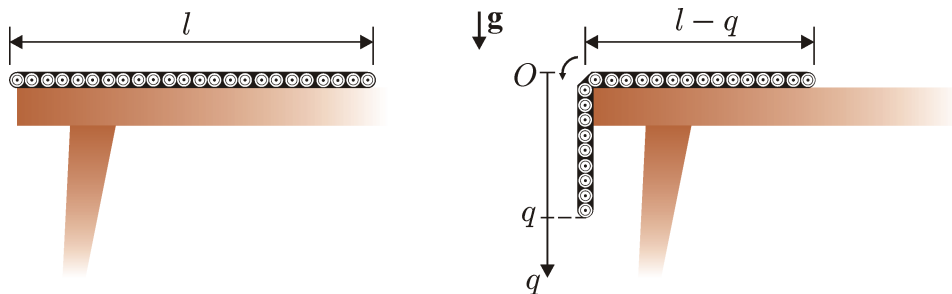
Tento výsledek je v souladu s naším předchozím zjištěním, že plošný element fázového prostoru  $dq_0 dp_0$  v čase  $t = 0$  je roven plošnému elementu  $dq dp$  v kterémkoli následujícím okamžiku  $t > 0$ , viz obr. 1.41.



Obrázek 1.41: Fázová trajektorie  $s$  vznikla počátečními podmínkami  $(q_0, p_0)$  (černý kroužek), fázová trajektorie  $s'$  je důsledkem trochu jiných počátečních podmínek  $(q_0 + dq_0, p_0 + dp_0)$  (červený kroužek). V čase  $t > 0$  jsou ukázány pohybové stavy na obou fázových trajektoriích (černý a červený bod). Plochy obdélníků  $dq_0 dp_0$  a  $dq dp$  (zeleně vyšrafovaných) jsou si rovny, protože Jacobiho determinant přechodu od  $(q_0, p_0)$  k  $(q, p)$  je roven 1, viz (1.357).

### 1.11.8 Řetěz sklouzávající přes okraj stolu

Dokonale ohebný nepružný homogenní řetěz o délce  $l$  a (konstantní) délkové hustotě  $\tau$  spočívá na dokonale hladkém vodorovném stole, viz obr. 1.42 vlevo. Někdo řetěz posunul tak, že jeho část visela přes okraj, takže řetěz začal vlivem tíhové síly charakterizované gravitačním zrychlením  $\mathbf{g}$  s nenulovou počáteční rychlostí sklouzávat přes okraj stolu podle obr. 1.42 vpravo. Popište pohyb řetězu.



Obrázek 1.42: Vlevo: homogenní řetěz spočívá na dokonale hladkém stole. Vpravo: Vlivem tíhové síly řetěz sklouzává přes okraj stolu.

#### • Počet stupňů volnosti, Lagrangeova rovnice, pohybová rovnice

Tato soustava má zřejmě jeden stupeň volnosti ( $M = 1$ ), zobecněnou souřadnicí označíme délku  $q$  části řetězu visící přes okraj stolu. Kinetická energie je

$$T = \frac{1}{2}\tau l \dot{q}^2,$$

neboť každá část řetězu se v daném okamžiku pohybuje se stejnou rychlostí  $\dot{q}$ . Potenciální energie je dána visící hmotou řetězu  $\tau q$ , jejíž těžiště se nachází v jejím středu v poloze  $q/2$ :

$$V = -\tau q g \frac{q}{2} = -\frac{1}{2}\tau g q^2,$$

pokud ztotožníme nulovou hladinu potenciální energie s horní plochou desky stolu. Lagrangeovu funkci (1.95) na str. 40 potom získáváme ve tvaru

$$L \equiv T - V = \frac{1}{2}\tau l \dot{q}^2 + \frac{1}{2}\tau g q^2. \quad (1.358)$$

Pohybovou rovnici sestavíme pomocí Eulerových-Lagrangeových rovnic (1.96):

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{\partial L}{\partial q} \quad \Rightarrow \quad \tau l \ddot{q} = \tau g q. \quad (1.359)$$

Po drobné úpravě ji pak dostáváme v podobě diferenciální rovnice

$$\ddot{q} - \frac{g}{l} q = 0. \quad (1.360)$$

• **Řešení pohybové rovnice**

Vzhledem k tomu, že je druhý člen na levé straně diferenciální rovnice záporný, zpětným dosazením se lze přesvědčit o tom, že jejím řešením je funkce

$$q(t) = ae^{\kappa t} + be^{-\kappa t}, \quad \text{kde} \quad \kappa \equiv \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (1.361)$$

Zde se objevují dvě integrační konstanty  $a$  a  $b$ , které určíme z počátečních podmínek, kterým se budeme věnovat vzápětí. Nejprve však vyjádříme zobecněnou rychlost

$$\dot{q}(t) = \kappa ae^{\kappa t} - \kappa be^{-\kappa t}. \quad (1.362)$$

Počáteční podmínky nastavíme opět zcela obecně: V čase  $t = 0$  visí přes okraj stolu část řetězu o délce  $q_0$  a řetěz má počáteční rychlost  $v_0$ , tedy:

$$q(0) = q_0, \quad \dot{q}(0) = v_0.$$

Dosazením těchto počátečních podmínek do funkčních předpisů zobecněné souřadnice (1.361) a zobecněné rychlosti (1.362) dostáváme soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých  $a$  a  $b$

$$a + b = q_0, \quad \kappa(a - b) = v_0, \quad (1.363)$$

jejíž řešením jsou

$$a = \frac{1}{2} \left( q_0 + \frac{v_0}{\kappa} \right), \quad b = \frac{1}{2} \left( q_0 - \frac{v_0}{\kappa} \right).$$

Závislost zobecněné souřadnice  $q$  na čase  $t$  tedy udává funkce

$$q(t) = \frac{1}{2} \left( q_0 + \frac{v_0}{\kappa} \right) e^{\kappa t} + \frac{1}{2} \left( q_0 - \frac{v_0}{\kappa} \right) e^{-\kappa t} \quad (1.364)$$

a časová závislost zobecněné rychlosti  $\dot{q}$  dále funkce

$$\dot{q}(t) = \frac{1}{2} (\kappa q_0 + v_0) e^{\kappa t} - \frac{1}{2} (\kappa q_0 - v_0) e^{-\kappa t}. \quad (1.365)$$

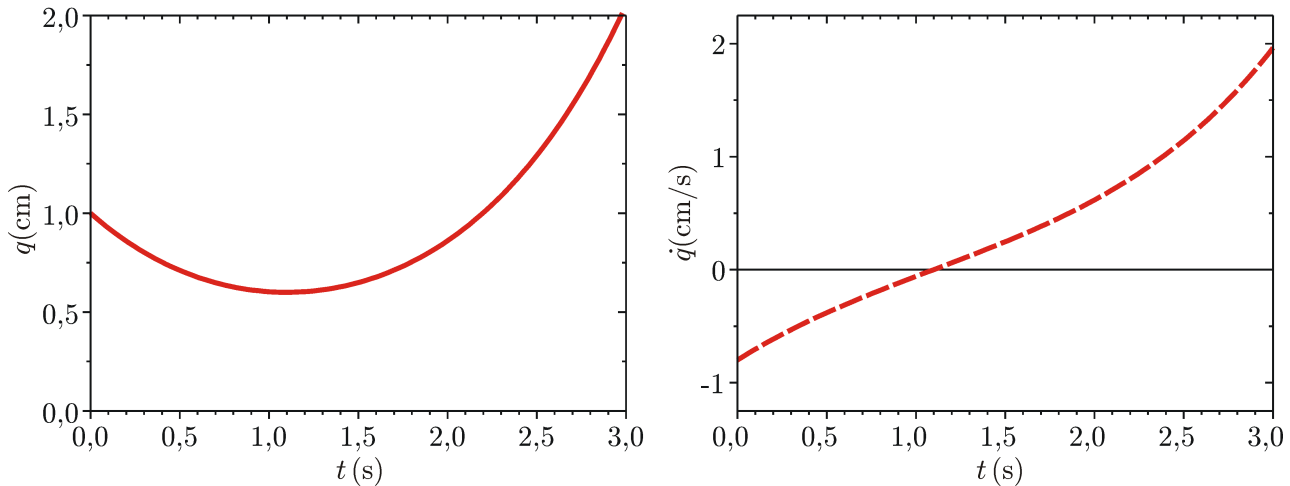
Funkční předpis (1.364) funkce  $q(t)$  ještě заслужuje následující komentář: Z povahy úlohy plyne, že vždy musí platit  $q \geq 0$ , neboť záporná zobecněná souřadnice  $q$  znamená, že celý řetěz spočívá na horní desce stolu. V takovém případě již žádná jeho část nevisí ze stolu a tíhová síla tudíž nemůže řetěz urychlovat, popř. zpomalovat. To znamená, že by pohybová rovnice (1.360) již neplatila (za neexistující třecí síly by šlo rovnoměrný pohyb po vodorovné desce stolu). Aby tento případ nenastal, počáteční podmínky musí mít následující omezení. První je zřejmé:

$$q_0 \geq 0. \quad (1.366)$$

Druhé získáme touto úvahou: Funkce  $e^{\kappa t}$  monotónně roste na rozdíl od  $e^{-\kappa t}$ , která se blíží nule, když  $t \rightarrow \infty$ . Proto, aby vždy platilo  $q \geq 0$ , omezení pro počáteční rychlost spočívá v tom, že závorka u  $e^{-\kappa t}$  nesmí být záporná, neboli

$$v_0 \geq -\kappa q_0. \quad (1.367)$$

Hraniční případ, kdy  $v_0 = -\kappa q_0$ , odpovídá situaci, kdy má řetěz takovou počáteční (zápornou) rychlost, že se visící část postupně zmenšuje tak, že v čase  $t \rightarrow \infty$  nehybně leží celý na desce stolu, přičemž jeho levý konec právě splývá s okrajem desky, jak je znázorněno na obr. 1.42 vlevo.



Obrázek 1.43: Vlevo: Závislost zobecněné souřadnice na čase  $q(t)$  podle (1.364). Vpravo: Závislost zobecněné rychlosti na čase  $\dot{q}(t)$  podle (1.365). Byly zadány následující hodnoty:  $\kappa = 1 \text{ s}^{-1}$ ;  $q_0 = 1 \text{ cm}$ ;  $v_0 = -0,8 \text{ cm/s}$ . Počáteční rychlost  $v_0$  je záporná, řetěz se tedy na počátku pohybuje tak, že se jeho visící část zkracuje. Zároveň však platí podmínka (1.367). Vlivem tíhové síly se v čase zhruba 1,1 s tento pohyb „vzhůru“ zastaví a řetěz začne sklouzávat dolů, přičemž se již neustále urychluje.

Příklady grafů obou funkcí (1.364) a (1.365) jsou ukázány na obr. 1.43. Tím bychom mohli úlohu považovat za vyřešenou, avšak budeme ještě diskutovat další vlastnosti pohybu, jak jsme je postupně rozváděli v předchozím textu.

### • Zákon zachování

Lagrangeova funkce (1.358) explicitně nezávisí na čase, proto integrál energie (1.107)

$$h = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} - L = \tau l \dot{q}^2 - \frac{1}{2} \tau l \dot{q}^2 - \frac{1}{2} \tau g q^2 = \frac{1}{2} \tau l \dot{q}^2 - \frac{1}{2} \tau g q^2 = T + V = E \quad (1.368)$$

je konstantní a je zároveň roven mechanické energii  $E$ . Rovnice (1.368) je tedy též prvním integrálem pohybové rovnice (1.360) a dosazením se lze přesvědčit o tom, že funkce (1.364) je jejím řešením. Zjistili bychom při tom, že  $E = \frac{1}{2} \tau l v_0^2 - \frac{1}{2} \tau g q_0^2$ .

### • Hamiltonova funkce, kanonické rovnice

Pohybové rovnice bychom mohli sestavit i pomocí kanonických rovnic (1.286) na str. 107. Nejprve určíme zobecněnou hybnost podle (1.280) na str. 106:

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \tau l \dot{q}, \quad (1.369)$$

odkud dostáváme vyjádření zobecněné rychlosti  $\dot{q}$  pomocí zobecněné hybnosti  $p$

$$\dot{q} = \frac{p}{\tau l}. \quad (1.370)$$

Toto vyjádření dosadíme do integrálu energie (1.368) a tím přecházíme od proměnných  $(q, \dot{q})$  k proměnným  $(q, p)$  a zároveň od integrálu energie  $h$  k Hamiltonově funkci  $H$  podle (1.281)

na str. 106:

$$H = \frac{p^2}{2\tau l} - \frac{1}{2}\tau g q^2. \quad (1.371)$$

Kanonické rovnice (1.286) potom dostáváme ve tvaru

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{\tau l}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = \tau g q. \quad (1.372)$$

Rovnice vlevo je opět definiční a již jsme ji našli dříve, viz (1.370). Dosadíme-li za  $p$  z definiční rovnice vlevo do rovnice s fyzikálním obsahem vpravo, dostáváme pohybovou rovnici

$$\ddot{q} = \frac{g}{l}q,$$

kteřou už máme sestavenou, viz (1.360).

### • Řešení pomocí kanonické transformace

Mohli bychom také opět „uhodnout“ nějakou kanonickou transformaci takovou, že povede k diferenciálním rovnicím v podstatně jednodušším tvaru než původní rovnice (1.360), jako jsme to učinili v úloze 1.11.4 na str. 111. Zkusíme takový přechod od „starých“ proměnných  $q$  a  $p$  k „novým“ proměnným  $Q$  a  $P$ , kdy ze „staré“ Hamiltonovy funkce  $H$  vyjádřenou vztahem (1.371) bude „nová“ Hamiltonova funkce ve tvaru

$$H' = \sqrt{\frac{g}{l}} P, \quad (1.373)$$

přičemž podle (1.304) na str. 110 předpokládáme  $H' = H$ . Inverzní transformační rovnice (1.290) mezi „starými“ a „novými“ proměnnými pak budou následující:

$$q = \left(\frac{g}{l}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{2P}{\tau g}} \sinh Q, \quad p = \left(\frac{g}{l}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{2\tau l P} \cosh Q. \quad (1.374)$$

S hyperbolickými funkcemi jsme se již setkali v úloze 1.10.2, když jsme hledali tvar řetězovky. Uvedli jsme, že platí

$$\cosh^2 Q - \sinh^2 Q = 1, \quad (1.375)$$

viz (1.270) na str. 103. S využitím tohoto vztahu pak lze ukázat, že dosazením transformačních rovnic (1.374) do „staré“ Hamiltonovy funkce (1.371) vskutku dostáváme „novou“ Hamiltonovu funkci (1.373).

Jak víme, testem toho, zda je přechod od „starých“ proměnných k „novým“ proměnným kanonickou transformací, je platnost podmínky (1.305), neboli

$$p dq - P dQ = dF. \quad (1.376)$$

Připomínáme, že funkce  $F$  je funkcí „staré“ proměnné  $q$  a „nové“ proměnné  $Q$ . Diferenciál  $dq$  dostaneme diferencováním první inverzní transformační rovnice (1.374):

$$dq = \left(\frac{g}{l}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{1}{2\tau g P}} \sinh Q dP + \left(\frac{g}{l}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{2P}{\tau g}} \cosh Q dQ.$$

Tento diferenciál dále dosadíme spolu s druhou inverzní transformační rovnicí (1.374) do podmínky (1.376) a dostáváme

$$\left(\frac{g}{l}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{2\tau l P} \cosh Q \left[ \left(\frac{g}{l}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{1}{2\tau g P}} \sinh Q dP + \left(\frac{g}{l}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{2P}{\tau g}} \cosh Q dQ \right] - P dQ = dF.$$

Drobné úpravy nás nakonec přivedou k následujícímu tvaru podmínky (1.376):

$$\sinh Q \cosh Q dP + P (2 \cosh^2 Q - 1) dQ = dF,$$

která zároveň říká toto:<sup>52</sup>

$$\frac{\partial F}{\partial P} = \sinh Q \cosh Q = \frac{1}{2} \sinh(2Q), \quad \frac{\partial F}{\partial Q} = P (2 \cosh^2 Q - 1) = P \cosh(2Q).$$

Po integraci a dosazení za  $P$  z první inverzní transformační rovnice (1.374) dostáváme funkci  $F$  v tomto tvaru:

$$F = \frac{1}{2} P \sinh(2Q) = \frac{\tau \sqrt{gl} \sinh(2Q)}{2 \sinh^2 Q} q^2.$$

Podmínka (1.376) je tedy splněna, což znamená, že přechod od „starých“ proměnných  $q$  a  $p$  k „novým“ proměnným  $Q$  a  $P$  popsaný inverzními transformačními rovnicemi (1.374) je vskutku kanonickou transformací.

### • Řešení „nových“ kanonických rovnic

„Nové“ kanonické rovnice určíme na základě „nové“ Hamiltonovy funkce  $H'$  určené vztahem (1.373):

$$\dot{Q} = \frac{\partial H'}{\partial P} = \sqrt{\frac{g}{l}} \equiv \kappa, \quad \dot{P} = -\frac{\partial H'}{\partial Q} = 0. \quad (1.377)$$

Jejich řešení nalezneme velmi snadno prostou integrací:

$$Q = \kappa t + \eta, \quad P = \text{konst.}, \quad (1.378)$$

kde  $\eta$  je integrační konstanta. Druhý z výsledků (1.378) ve své podstatě říká, že  $P$  je druhou z integračních konstant. První z výsledků (1.378) potom dosadíme do první z inverzních transformačních rovnic (1.374):

$$\begin{aligned} q(t) &= \left(\frac{g}{l}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{2P}{\tau g}} \sinh(\kappa t + \eta) = \left(\frac{g}{l}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{2P}{\tau g}} [e^{\kappa t + \eta} - e^{-(\kappa t + \eta)}] = \\ &= \left(\frac{g}{l}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{2P}{\tau g}} (e^{\eta} e^{\kappa t} - e^{-\eta} e^{-\kappa t}) = a e^{\kappa t} + b e^{-\kappa t}, \end{aligned} \quad (1.379)$$

<sup>52</sup>Potřebné mezivýpočty jsou následující:

$$\sinh Q \cosh Q = \frac{1}{2} (e^Q - e^{-Q}) \frac{1}{2} (e^Q + e^{-Q}) = \frac{1}{4} (e^{2Q} - e^{-2Q}) = \frac{1}{2} \sinh(2Q)$$

a dále

$$2 \cosh^2 Q - 1 = 2 \frac{1}{4} (e^Q + e^{-Q})^2 - 1 = \frac{1}{2} (e^{2Q} + 2 + e^{-2Q}) - 1 = \frac{1}{2} (e^{2Q} + e^{-2Q}) = \cosh(2Q).$$

Vidíme, že vztahy mezi hyperbolickými funkcemi jsou velmi podobné vztahům mezi goniometrickými funkcemi. Proto se funkce „sinh“ nazývá sinus hyperbolický a funkce „cosh“ kosinus hyperbolický.



kde jsme přešli od dvojice integračních konstant  $\eta$  a  $P$  k novým dvěma integračním konstantám definovaným následujícím způsobem:

$$a \equiv \left(\frac{g}{l}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{2P}{\tau g}} e^{\eta}, \quad b \equiv \left(\frac{g}{l}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{2P}{\tau g}} e^{-\eta}.$$

Stejný výsledek jsme samozřejmě obdrželi již dříve, viz (1.361).

### • Rovnice fázové trajektorie

Jak víme, fázovou trajektorii zobrazujeme ve fázovém prostoru, ve kterém nyní zavádíme souřadný systém sestávající ze dvou os: na osu  $q$  vynášíme okamžité hodnoty zobecněné souřadnice a na osu  $p$  okamžité hodnoty zobecněné hybnosti.

Závislost zobecněné souřadnice  $q$  na čase  $t$  udává funkce (1.364)

$$q(t) = \frac{1}{2} \left( q_0 + \frac{v_0}{\kappa} \right) e^{\kappa t} + \frac{1}{2} \left( q_0 - \frac{v_0}{\kappa} \right) e^{-\kappa t}, \quad (1.380)$$

kde konstanty  $q_0 = q(0)$  a  $v_0 = \dot{q}(0)$  vyjadřují počáteční podmínky. Časový vývoj zobecněné hybnosti určíme pomocí vztahu (1.369)

$$p(t) = \tau l \dot{q} = \frac{\tau l \kappa}{2} \left( q_0 + \frac{v_0}{\kappa} \right) e^{\kappa t} - \frac{\tau l \kappa}{2} \left( q_0 - \frac{v_0}{\kappa} \right) e^{-\kappa t}, \quad (1.381)$$

kde jsme použili časovou derivaci funkce (1.380). Avšak počáteční podmínku  $v_0 = \dot{q}(0)$  pro zobecněnou rychlost musíme nahradit počáteční podmínkou pro zobecněnou hybnost, která má zřejmě tvar:

$$p(0) = \tau l v_0 \equiv p_0 \quad \Rightarrow \quad v_0 = \frac{p_0}{\tau l}. \quad (1.382)$$

Omezení (1.366) pro počáteční polohu  $q_0$ , tj.

$$q_0 \geq 0, \quad (1.383)$$

zůstává v platnosti. Druhé omezení pro počáteční rychlost  $v_0$  vyjádřené nerovností (1.367) se nyní samozřejmě přenáší na počáteční hybnost:

$$v_0 \geq -\kappa q_0 \quad \Rightarrow \quad p_0 \geq -\tau l \kappa q_0. \quad (1.384)$$

Časové závislosti (1.380) a (1.381), ve kterých vystupuje dvojice počátečních hodnot  $q_0$  a  $p_0$ , jsou potom následující:

$$q(t) = \frac{1}{2} \left[ \left( q_0 + \frac{p_0}{\tau l \kappa} \right) e^{\kappa t} + \left( q_0 - \frac{p_0}{\tau l \kappa} \right) e^{-\kappa t} \right], \quad (1.385)$$

$$p(t) = \frac{1}{2} \left[ (\tau l \kappa q_0 + p_0) e^{\kappa t} - (\tau l \kappa q_0 - p_0) e^{-\kappa t} \right]. \quad (1.386)$$

Eliminací času  $t$  ze vztahů (1.385) a (1.386) dostaneme rovnici fázové trajektorie  $p(q)$ . Nejprve  $q(t)$  vynásobíme výrazem  $\tau l \kappa$ , odečteme kvadráty obou vztahů:

$$(\tau l \kappa q)^2 - p^2 = \frac{1}{4} \left[ (\tau l \kappa q_0 + p_0) e^{\kappa t} + (\tau l \kappa q_0 - p_0) e^{-\kappa t} \right]^2 - \frac{1}{4} \left[ (\tau l \kappa q_0 + p_0) e^{\kappa t} - (\tau l \kappa q_0 - p_0) e^{-\kappa t} \right]^2$$

a upravíme:

$$(\tau l \kappa q)^2 - p^2 = (\tau l \kappa q_0 + p_0) (\tau l \kappa q_0 - p_0) = (\tau l \kappa q_0)^2 - p_0^2.$$

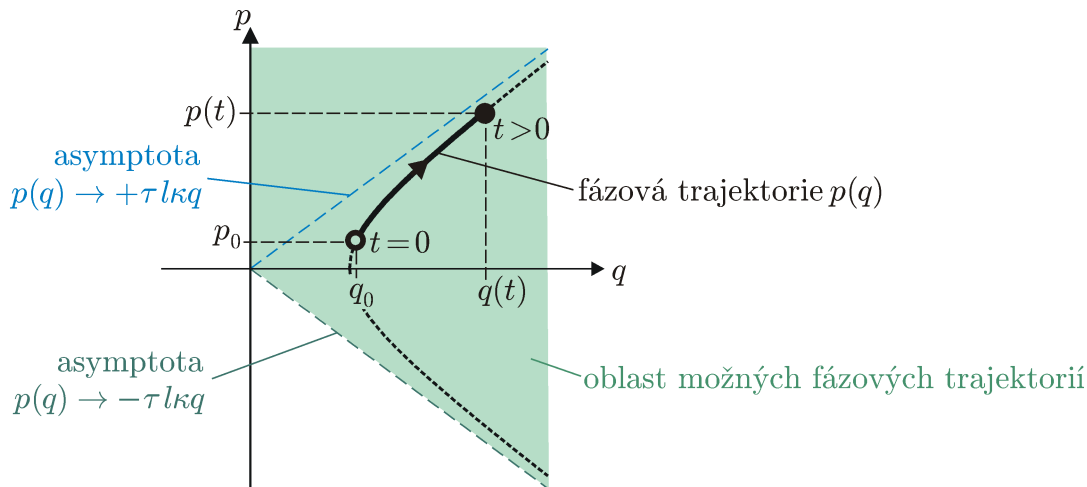
Odtud získáváme rovnici fázové trajektorie:

$$p(q) = \pm \sqrt{p_0^2 - (\tau l \kappa q_0)^2 + (\tau l \kappa q)^2}. \quad (1.387)$$

Grafem této funkce je hyperbola, jejíž osy souměrnosti jsou rovnoběžné s osami  $q$  a  $p$ . Vyjádření pro obě její asymptoty dostaneme pomocí limity

$$q \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad p(q) \rightarrow \pm \tau l \kappa q. \quad (1.388)$$

Vzhledem k omezením (1.383) a (1.384) můžeme očekávat jen takové hyperboly, jejichž body jsou „vpravo“ od osy  $p$  a zároveň „nad“ asymptotou  $p(q) \rightarrow -\tau l \kappa q$ . Tato oblast spolu s ukázkou jedné z fázových trajektorií je zobrazena na obr. 1.44.



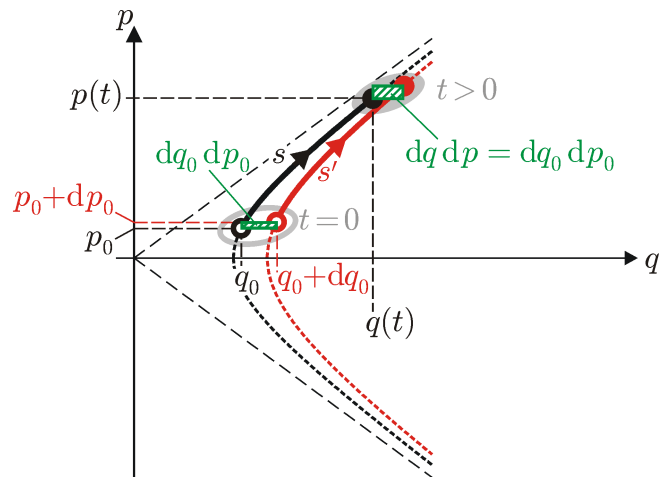
Obrázek 1.44: Fázová trajektorie  $p(q)$  ve tvaru hyperboly podle (1.387). V tomto případě bylo zvoleno  $p_0^2 < (\tau l \kappa q_0)^2$ . V čase  $t = 0$  je pohybový stav určen počátečními podmínkami  $(q_0, p_0)$  (černý kroužek), v čase  $t > 0$  okamžitými hodnotami  $[q(t), p(t)]$  (černý bod). Je též zeleně vyznačena oblast možných fázových trajektorií „nad“ asymptotou  $p(q) \rightarrow -\tau l \kappa q$ .

### • Vztah mezi plošnými elementy fázového prostoru

Víme, že poměr mezi plošnými elementy fázového prostoru je vyjádřen Jacobiho determinan-tem (1.348). Po vyjádření všech parciálních derivací funkcí (1.385) a (1.386) je tento determin-ant následující:

$$\begin{aligned} J &\equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial q}{\partial q_0} & \frac{\partial q}{\partial p_0} \\ \frac{\partial p}{\partial q_0} & \frac{\partial p}{\partial p_0} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} (e^{\kappa t} + e^{-\kappa t}) & \frac{1}{2\tau l \kappa} (e^{\kappa t} - e^{-\kappa t}) \\ \frac{\tau l \kappa}{2} (e^{\kappa t} - e^{-\kappa t}) & \frac{1}{2} (e^{\kappa t} + e^{-\kappa t}) \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{4} (e^{\kappa t} + e^{-\kappa t})^2 - \frac{1}{4} (e^{\kappa t} - e^{-\kappa t})^2 = 1. \end{aligned} \quad (1.389)$$

To, že je Jacobiho determinant v každém okamžiku roven 1, znamená, že se plošný element  $dq dp$  v kterémkoli následujícím okamžiku  $t > 0$  zachovává, přičemž je roven plošnému elementu fázového prostoru  $dq_0 dp_0$  v čase  $t = 0$ , viz obr. 1.45.



Obrázek 1.45: Fázová trajektorie  $s$  vznikla počátečními podmínkami  $(q_0, p_0)$  (černý kroužek), fázová trajektorie  $s'$  je důsledkem trochu jiných počátečních podmínek  $(q_0 + dq_0, p_0 + dp_0)$  (červený kroužek). V čase  $t > 0$  jsou ukázány pohybové stavy na obou fázových trajektoriích (černý a červený bod). Plochy obdélníků  $dq_0 dp_0$  a  $dq dp$  jsou si rovny, protože Jacobiho determinant přechodu od  $(q_0, p_0)$  k  $(q, p)$  je roven 1, viz (1.389).

## 1.12 Hamiltonova-Jacobiho rovnice

V předchozím výkladu jsme se zabývali kanonickými transformacemi a na dvou příkladech jsme ukázali, jak lze zjednodušit řešení pohybových rovnic. Příslušné kanonické transformace jsme však v obou případech jen víceméně náhodně „vytušili“. Nyní si ukážeme systematictější metodu, jak získat řešení pohybových rovnic. Abychom však zachovali charakter tohoto textu, který má sloužit čtenářům pro získání představy o postupech užívaných při řešení úloh v mechanice, nebudeme tuto metodu popisovat v celé její šíři, ale zaměříme se pouze na její podstatu.<sup>53</sup>

### 1.12.1 Nalezení Hamiltonovy-Jacobiho rovnice

Připomeňme si veličinu zvanou akce, kterou jsme definovali vztahem (1.242) na str. 95, když jsme se zabývali Hamiltonovým principem:

$$S \equiv \int_{t_0}^{t_1} L(q_j, \dot{q}_j, t) dt. \quad (1.390)$$

Tedy jsme hledali takové funkce  $q_j(t)$ , pro něž má akce  $S$  extrémní hodnotu (minimum). Všechny uvažované funkce  $q(t)$  měly „pevné“ krajní hodnoty  $q(t_0)$  a  $q(t_1)$  a meze  $t_0$  a  $t_1$  jsme mlčky považovali za konstanty. Ukázali jsme, že akce nabývá minima tehdy, když funkce  $q_j(t)$  splňují Eulerovy-Lagrangeovy rovnice (1.248) na str. 96

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2, \dots, M). \quad (1.391)$$

<sup>53</sup>Více poznatků o této metodě lze najít např. v následujících knihách: M. Brdička, A. Hladík: *Teoretická mechanika*. Academia, Praha 1987, kap. 3, odst. 3.12. nebo L. D. Landau, E. M. Lifshitz: *Mechanics*. Course of Theoretical Physics. Elsevier 2010, §47.

Zaměřme se nyní na integrál<sup>54</sup>

$$\int_{t_0}^t L(q_j, \dot{q}_j, t') dt', \quad (1.392)$$

kde  $t$  může mít libovolnou hodnotu z intervalu  $(t_0, t_1)$ . Potom akce  $S$ , která je tomuto integrálu rovna, obecně závisí na  $t$ . Dále předpokládejme, že, na rozdíl od krajních hodnot  $q_j(t_0)$ , i krajní hodnoty  $q_j(t)$  mohou mít nezávisle na sobě libovolnou hodnotu. Znamená to tedy, že akce  $S$  je dále ještě obecně funkcí  $q_j(t)$ . Můžeme tedy napsat

$$S[q_j(t); t] = \int_{t_0}^t L[q_j(t'); \dot{q}_j(t'); t'] dt'. \quad (1.393)$$

Je třeba zdůraznit, že při libovolných hodnotách  $t$  a  $q_j(t)$  uvažujeme již jen o takových funkcích  $q_j(t')$ , které jsou řešením rovnic (1.391).

Nejprve prozkoumáme, jak se akce  $S$  změní, když změníme  $q_j(t)$ , avšak čas  $t$  ponecháme konstantní. Budeme postupovat obdobně, jako v odst. 1.9.4 při hledání Eulerových-Lagrangeových rovnic z Hamiltonova principu:

$$\delta S = \delta \int_{t_0}^t L(q_j, \dot{q}_j, t') dt' = \int_{t_0}^t \delta L(q_j, \dot{q}_j, t') dt' = \int_{t_0}^t \sum_{j=1}^M \left( \frac{\partial L}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right) dt'. \quad (1.394)$$

Užitím

$$\frac{d}{dt'} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \right) = \frac{d}{dt'} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \quad (j = 1, 2, \dots, M)$$

přepíšeme integrand v (1.394) a dostáváme

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_0}^t \sum_{j=1}^M \left[ \frac{\partial L}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{d}{dt'} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \right) - \frac{d}{dt'} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j \right] dt' = \\ &= \int_{t_0}^t \sum_{j=1}^M \frac{d}{dt'} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \right) dt' + \int_{t_0}^t \sum_{j=1}^M \left[ \frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt'} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \right] \delta q_j dt'. \end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že funkce  $q_j(t')$  jsou řešením rovnic (1.391), druhý člen tvořený integrálem je roven nule. Zůstává tedy pouze první člen, ve kterém zaměníme pořadí sumace a integrace:

$$\delta S = \int_{t_0}^t \sum_{j=1}^M \frac{d}{dt'} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \right) dt' = \sum_{j=1}^M \int_{t_0}^t \frac{d}{dt'} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \right) dt' = \sum_{j=1}^M \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \Big|_{t_0}^t = \sum_{j=1}^M \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j.$$

Tento výsledek jsme dostali proto, že krajní hodnoty  $q_j(t_0)$  stále považujeme za „pevné“ a tudíž  $\delta q_j(t_0) = 0$ . Krajní hodnoty  $q_j(t)$  můžeme naopak libovolně měnit a jejich změny vyjadřují infinitezimální veličiny  $\delta q_j$ .

Parciální derivaci  $L$  podle  $\dot{q}_j$  jsme již dříve označili jako zobecněnou hybnost  $p_j$ , viz (1.280) na str. 106. Proto dospíváme k následujícímu výsledku:

$$\delta S = \sum_{j=1}^M p_j \delta q_j.$$

<sup>54</sup>Integrační proměnnou nyní označíme symbolem  $t'$ , aby nedošlo k záměně s horní mezí integrálu.

Tento vztah představuje onen „nekompletní“ diferenciál funkce  $S$ , se kterým jsme se setkali v úvodu odst. 1.9.4 na str. 95. Platí tedy

$$\frac{\partial S}{\partial q_j} = p_j \quad (j = 1, 2, \dots, M). \quad (1.395)$$

Změna akce  $S$  v daném čase  $t$  vyvolaná změnou krajní hodnoty  $q_j(t)$  tudíž souvisí se zobecněnou hybností  $p_j(t)$ .

Nyní se zaměříme na to, s čím souvisí změna akce  $S$ , když změním čas  $t$  a ponecháme naopak konstantní všechna  $q_j(t)$ . Nejprve rozepíšeme totální diferenciál akce  $S$  s vědomím toho, že obecně závisí na všech zobecněných souřadnicích  $q_j$  a na čase  $t$ :

$$dS = \sum_{j=1}^M \frac{\partial S}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial S}{\partial t} dt. \quad (1.396)$$

Tvar totálního diferenciálu však též přímo vyplývá z (1.393):

$$dS = L dt. \quad (1.397)$$

Nahradíme-li Lagrangeovu funkci  $L$  Hamiltonovou funkcí  $H$  podle (1.281) na str. 106, vztah (1.397) můžeme ještě přepsat do tvaru

$$dS = \left( \sum_{j=1}^M p_j \dot{q}_j - H \right) dt = \sum_{j=1}^M p_j \dot{q}_j dt - H dt = \sum_{j=1}^M p_j dq_j - H dt. \quad (1.398)$$

Porovnáním obou vyjádření totálních diferenciálů (1.396) a (1.398) dostáváme kromě vztahu (1.395) ještě

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H. \quad (1.399)$$

Vidíme tedy, že změna akce  $S$  se změnou času  $t$  souvisí s Hamiltonovou funkcí  $H$ . Tento výsledek je velmi důležitý. Jak víme, Hamiltonova funkce je obecně funkcí zobecněných souřadnic  $q_j$ , zobecněných hybností  $p_j$  a času  $t$ . Nahradíme-li v ní zobecněné hybnosti parciální derivací  $S$  podle  $q_j$ , viz (1.395), můžeme přepsat rovnici (1.399) do tvaru

$$H \left( q_j; \frac{\partial S}{\partial q_j}; t \right) = -\frac{\partial S}{\partial t}. \quad (1.400)$$

Rovnice, ke které jsme dospěli, se nazývá *Hamiltonova-Jacobiho rovnice*. Jak jsme již poznamenali v úvodu tohoto odstavce, tato rovnice představuje systematictější metodu ve srovnání s postupy využívajících samotné kanonické transformace. Podnětně připomíná Schrödingrovu rovnici používanou v kvantové mechanice a řadí se tak spolu s Poissonovými závorkami k nejvýraznějším předlohám z klasické mechaniky pro hledání matematické formulace rodící se kvantové teorie.

Řešeními obecnějších úloh mechaniky pomocí Hamiltonovy-Jacobiho rovnice se zde nebudeme zabývat. Její použití pouze ukážeme v následujícím odstavci na jednoduchém příkladu harmonického oscilátoru.

### 1.12.2 Harmonický oscilátor (počtvrté)

Tuto úlohu jsme začali řešit v odst. 1.8.1 na str. 46, kde je uvedeno i její zadání. Poté jsme v ní pokračovali v odst. 1.11.4 na str. 110. Zde jsme našli Hamiltonovu funkci harmonického oscilátoru ve tvaru (1.310), jenž zde znovu uvádíme:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2. \quad (1.401)$$

#### • Sestavení Hamiltonovy-Jacobiho rovnice

Protože Hamiltonova funkce  $H$  nyní nezávisí explicitně na čase, přímo se rovná mechanické energii  $E$  stejně jako integrál energie  $h$  (viz (1.132) na str. 49):

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2 = E. \quad (1.402)$$

Hamiltonovu-Jacobiho rovnici (1.400) tedy nacházíme ve tvaru

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -E. \quad (1.403)$$

Kromě času  $t$  je akce  $S$  dále funkcí i zobecněné souřadnice  $q$  a podle (1.395) platí:

$$\frac{\partial S}{\partial q} = p. \quad (1.404)$$

Totální diferenciál akce  $S$  je tedy následující:

$$dS = \frac{\partial S}{\partial q}dq + \frac{\partial S}{\partial t}dt = pdq - E dt. \quad (1.405)$$

#### • Řešení Hamiltonovy-Jacobiho rovnice

Jednoduchý tvar Hamiltonovy-Jacobiho rovnice (1.403) nám umožňuje ji přímo integrovat. Přitom nezapomínáme, že se na její levé straně nachází parciální derivace  $S$  podle času  $t$ . Při integraci parciální derivace se namísto integrační konstanty totiž objeví celá funkce všech zbývajících proměnných:

$$S(q, t) = -Et + W(q, E), \quad (1.406)$$

kde  $W$  je ona zmíněná funkce.<sup>55</sup> Na první pohled se zdá, že přítomnost této funkce, jejíž funkční předpis navíc zatím ani neznáme, celé řešení spíše komplikuje. Ukážeme však, že bude naopak k hledání řešení nezbytná. Podstata úspěchu spočívá v následujícím: Akce  $S$  je funkcí  $q$  a  $t$ , ale závislost  $q$  na  $t$  teprve hledáme. Zatímco vztah mezi  $q$  a  $E$ , které vystupují ve funkci  $W$ , je dán přímo Hamiltonovou funkcí (1.402). Chceme tedy přejít od dvojice proměnných  $q$  a  $t$  k dvojici proměnných  $q$  a  $E$ . Poznamenejme, že mechanickou energii  $E$  považujeme za proměnnou v souvislosti s libovolnými počátečními podmínkami. Jakmile jsou však jednou počáteční podmínky zvoleny, mechanická energie již samozřejmě zůstává zachována ve všech budoucích okamžicích, jak si ještě jednou připomeneme.

<sup>55</sup>Tato funkce se někdy nazývá *Hamiltonova charakteristická funkce*.

Přechod mezi dvojicemi proměnných  $(q, t) \rightarrow (q, E)$  provedeme následujícím způsobem: Přičteme k oběma stranám rovnice (1.405) výraz  $t dE + E dt$ :

$$dS + t dE + E dt = p dq + t dE.$$

Jelikož  $t dE + E dt = d(Et)$  a součet diferenciálů je roven diferenciálu součtu, tuto rovnici můžeme dále upravit do tvaru

$$d(S + Et) = p dq + t dE.$$

V závorce ovšem poznáváme funkci  $W$ , kterou jsme zavedli ve vztahu (1.406). Dostáváme tedy výraz pro její totální diferenciál

$$dW = p dq + t dE. \quad (1.407)$$

Protože zároveň platí

$$dW = \frac{\partial W}{\partial q} dq + \frac{\partial W}{\partial E} dE,$$

porovnáním získáváme následující vztahy:

$$\frac{\partial W}{\partial q} = p, \quad \frac{\partial W}{\partial E} = t. \quad (1.408)$$

Zabýváme se tedy funkcí  $W(q, E)$  namísto původní funkce  $S(q, t)$ . Proměnná  $q$  tedy zůstala, pouze jsme zaměnili  $t$  za  $E$ . Tomuto typu přechodu od jednoho souboru proměnných k druhému se říká *Legendreova duální transformace* a je hojně využívána v termodynamice.

Vzhledem k tomu, že výraz (1.407) představuje totální diferenciál, musí platit záměnnost pořadí u smíšených parciálních derivací, jak je ukázáno ve vztahu (3.13) na str. 233 v Dodatku A. Proto

$$\frac{\partial}{\partial E} \left( \frac{\partial W}{\partial q} \right) = \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{\partial W}{\partial E} \right) \Rightarrow \frac{dp}{dE} = \frac{dt}{dq}. \quad (1.409)$$

Z rovnice (1.402) dále vyjádříme zobecněnou hybnost  $p$

$$p = \pm \sqrt{2mE - mkq^2}$$

a zderivujeme ji podle mechanické energie  $E$ :

$$\frac{dp}{dE} = \pm \frac{m}{\sqrt{2mE - mkq^2}}.$$

Po dosazení této derivace do (1.409) dostáváme:

$$dt = \frac{dp}{dE} dq \Rightarrow dt = \pm \frac{m dq}{\sqrt{2mE - mkq^2}}.$$

Nyní již máme vztah mezi  $dt$  a  $dq$  a integrací této rovnice dostaneme závislost  $t(q)$ , z níž potom určíme hledanou inverzí závislost  $q(t)$ . Mechanickou energii  $E$  zde považujeme za konstantu, neboť teď již počítáme časový vývoj pohybového stavu s nějakými konkrétními počátečními podmínkami. Nejprve integrál upravíme do následujícího tvaru:

$$t = \pm \int \frac{m dq}{\sqrt{2mE - mkq^2}} = \pm \sqrt{\frac{m}{2E}} \int \frac{dq}{\sqrt{1 - kq^2/(2E)}}.$$

Dále použijeme substituci  $s \equiv q\sqrt{k/(2E)}$ , při níž platí  $dq = ds\sqrt{2E/k}$ . Potom

$$t = \pm\sqrt{\frac{m}{2E}} \int \sqrt{2E/k} \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}} = \pm\sqrt{\frac{m}{k}} \int \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}} = \mp\sqrt{\frac{m}{k}} \arccos s + C,$$

kde  $C$  je integrační konstanta. Při zpětném dosazení za  $s$  dostáváme

$$t = \mp\sqrt{\frac{m}{k}} \arccos \left( \sqrt{\frac{k}{2E}} q \right) + C.$$

Nyní přejdeme od funkce  $t(q)$  k inverzní funkci  $q(t)$ :

$$q(t) = \sqrt{\frac{2E}{k}} \cos [\pm\Omega(t - C)], \quad \text{kde} \quad \Omega \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Protože funkce kosinus je sudou funkcí, nezáleží na znaménku v jejím argumentu a proto symbol  $\pm$  můžeme vynechat. Vidíme, že kromě integrační konstanty  $C$  zde ještě vystupuje i mechanická energie  $E$  jako druhá integrační konstanta. Přejdeme-li k jiné dvojici integračních konstant pomocí transformačních rovnic

$$\sqrt{\frac{2E}{k}} \equiv A, \quad -\Omega C \equiv \phi - \frac{\pi}{2},$$

dostáváme již očekávaný výsledek

$$q(t) = A \cos \left( \Omega t + \phi - \frac{\pi}{2} \right) = A \sin(\Omega t + \phi),$$

viz např. (1.319) na str. 113.

Popsaný způsob ukazuje, že není třeba hledat řešení pohybové rovnice (1.312) na str. 111, která je diferenciální rovnicí druhého řádu. Stačilo nalézt vztahy (1.409) mezi  $dt$ ,  $dq$ ,  $dp$  a  $dE$ . Ty jsme získali nejprve integrací Hamiltonovy-Jacobiho rovnice (1.403), jejíž výsledkem byla rovnice (1.406). Další integrací jsme již dostali funkci popisující, jak na sobě závisí  $t$  a  $q$ . Opět tedy vidíme, že je třeba učinit dvě integrace, při nichž se objeví dvě integrační konstanty. Avšak tyto integrace jsme mohli provést „krok po kroku“ a ne „naráz“, jako v případě pohybové rovnice.

Nebylo ani nutné „uhodnout“ vhodnou kanonickou transformaci, abychom si hledání řešení pohybové rovnice usnadnili, jak jsme to udělali v odst. 1.11.4 na str. 111. Z tohoto pohledu jsme nyní postupovali „systematičtěji“.

Účinnost Hamiltonovy-Jacobiho metody se projevuje především v komplexnějších úlohách, které vedou na soustavy pohybových rovnic, jejichž řešení bývá značně obtížné. Jejich problematika však není obsahem tohoto textu a úloha o harmonickém oscilátoru zde slouží pouze jako ilustrativní příklad.



# Kapitola 2

## Kmitání

S kmitavým pohybem různých mechanických soustav se setkáváme doslova na každém kroku a je tedy velmi důležité umět matematicky popsat jejich chování. V úvodu využijeme obecných poznatků z předchozí kapitoly pojednávající o teoretické mechanice (např. potenciální energii mechanické soustavy) a též i některé řešené úlohy (např. harmonický oscilátor či matematické kyvadlo). Uvidíme však, že efektivní řešení pohybových rovnic kmitajících mechanických soustav bude též vyžadovat i užití dalších matematických nástrojů (např. komplexních funkcí nebo Fourierových řad), které jsme dosud nepotřebovali.

### 2.1 Potenciální energie kmitající mechanické soustavy

Z předchozí kapitoly víme, že potenciální energie mechanické soustavy je obecně funkcí  $M$  zobecněných (na sobě nezávislých) souřadnic  $q_1, q_2, \dots, q_M$  a času  $t$ , viz (1.95) na str. 40. Uvažujme nyní pouze o takových mechanických soustavách, jejichž potenciální energie není explicitní funkcí času, tj.

$$V \equiv V(q_1, q_2, \dots, q_M) \equiv V(q_j). \quad (2.1)$$

Taková soustava bude v bodě popsaném hodnotami zobecněných souřadnic  $(q_1, q_1, \dots, q_M) = (q_{e,1}, q_{e,2}, \dots, q_{e,M})$  setrvávat v klidu, pokud platí

$$dV|_{(q_1, q_1, \dots, q_M) = (q_{e,1}, q_{e,2}, \dots, q_{e,M})} = 0, \quad (2.2)$$

neboli funkce  $V(q_j)$  zde nabývá lokálního minima, maxima nebo sedlového bodu. Příklady takových bodů jsou zobrazeny na obr. 3.2 v Dodatku A na str. 230. Říkáme, že se mechanická soustava zde nachází v *rovnovážném stavu* nebo v *rovnovážné poloze*. Vztahy (3.5) a (3.6) na téže straně však říkají, že z nulovosti totálního diferenciálu (2.2) automaticky plyne nulovost všech parciálních derivací v daném bodě, tedy

$$\left. \frac{\partial V}{\partial q_j} \right|_{(q_1, q_1, \dots, q_M) = (q_{e,1}, q_{e,2}, \dots, q_{e,M})} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, M). \quad (2.3)$$

Ze základního kurzu matematické analýzy dále víme, že lokální minimum funkce více proměnných je určeno kladným znaménkem všech druhých parciálních derivací. Kromě vztahů (2.3) tedy pro lokální minimum potenciální energie  $V$  v bodě  $(q_{e,j})$  dále ještě musí platit

$$\left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_j^2} \right|_{(q_1, q_1, \dots, q_M) = (q_{e,1}, q_{e,2}, \dots, q_{e,M})} > 0 \quad (j = 1, 2, \dots, M). \quad (2.4)$$

Nabývá-li tedy potenciální energie  $V$  mechanické soustavy lokálního minima, znamená to, že jakákoli malá změna kterékoli zobecněné souřadnice  $q_j$  způsobí nárůst potenciální energie. To má za následek, že příslušné zobecněné síly (viz vztahy (1.83) na str. 38)

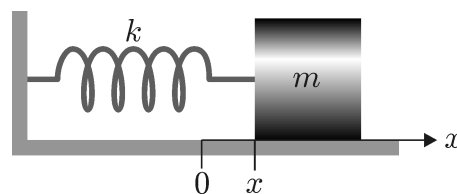
$$Q_j \equiv -\frac{\partial V}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2, \dots, M) \quad (2.5)$$

působí „proti“ této změně, a proto se jim říká *vrátne síly*. Výsledkem jsou neustálé oscilace mechanické soustavy okolo rovnovážného stavu určeného bodem  $(q_{e,1}, q_{e,2}, \dots, q_{e,M})$ . Těmto oscilacím říkáme *kmity* nebo též *kmitání* mechanické soustavy a takovým typem pohybu se budeme zabývat v této kapitole. Rovnovážnému stavu, okolo kterého soustava kmitá, říkáme *stabilní rovnovážný stav* nebo *stabilní rovnovážná poloha*.

Nulovost prvních parciálních derivací potenciální energie  $V$  v rovnovážném stavu  $(q_{e,1}, q_{e,2}, \dots, q_{e,M})$ , viz (2.3), říká, že v tomto stavu jsou všechny zobecněné síly  $Q_j$  nulové. Znamená to tedy, že mechanická soustava nacházející se v klidu v rovnovážném stavu v něm vskutku setrvává libovolně dlouho, neboť žádná síla  $Q_j$  ji nemůže z tohoto stavu vychýlit. Jak dále uvidíme, druhé parciální derivace potenciální energie  $V$  v rovnovážném stavu  $(q_{e,1}, q_{e,2}, \dots, q_{e,M})$ , viz (2.4), souvisejí s „tuhostí“ vazby mechanické soustavy k danému rovnovážnému stavu.

## 2.2 Netlumený harmonický oscilátor

Obecné úvahy popsané v předchozím odstavci budeme demonstrovat na netlumeném harmonickém oscilátoru. Ten byl již popsán v odst. 1.8.1 na str. 46. Závaží o hmotnosti  $m$  je připevněno k jednomu konci vodorovné nehmotné pružiny o tuhosti  $k$ , její druhý konec je pevně vetknut do zdi. Závaží  $m$  se může pohybovat bez tření po vodorovné podlaze po přímce rovnoběžné s osou pružiny. Protože je zřejmé, že jde o jednorozměrný pohyb, zvolíme kartézský souřadný systém takový, že osa  $x$  je rovnoběžná s osou pružiny a její počátek umístíme do polohy závaží  $m$ , ve které je pružina nezdeformována, viz obr. 2.1.



Obrázek 2.1: Harmonický oscilátor. Pokud se závaží nachází v poloze  $x = 0$ , pružina je nezdeformována.

Potenciální energie  $V$  harmonického oscilátoru potom vyjde ve tvaru

$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2, \quad (2.6)$$

jak jsme již zjistili, viz (1.121) na str. 47, a je tedy funkcí pouze jedné (zobecněné) souřadnice  $x$  ( $M = 1$ ). Poloha

$$x_e = 0 \quad (2.7)$$

zde představuje rovnovážnou polohu, neboť platí

$$\frac{dV}{dx} = kx, \quad (2.8)$$

a tedy, jak stanovuje podmínka (2.3),

$$\left. \frac{dV}{dx} \right|_{x=x_e} = 0. \quad (2.9)$$

Jde o minimum, což lze ukázat tak, že ověříme, zda je splněna podmínka (2.4):

$$\frac{d^2V}{dx^2} = k, \quad (2.10)$$

odkud

$$\left. \frac{d^2V}{dx^2} \right|_{x=x_e} = k > 0. \quad (2.11)$$

A dále zároveň vidíme, že druhá derivace  $V$  je rovna tuhosti pružiny. Je to právě ona souvislost s tuhostí vazby mechanické soustavy (zde harmonického oscilátoru) k rovnovážnému stavu (zde popsanému polohou závaží  $x_e = 0$ ), jak jsme zmínili na konci předchozího odstavce.

Vratnou silou je zde zřejmě síla, kterou působí pružina na závaží. Její průmět do osy  $x$  získáme podle (2.5) takto:

$$F^{\text{vrat}} = -\frac{dV}{dx} = -kx, \quad (2.12)$$

což je vztah, který známe ze základního kurzu mechaniky.<sup>1</sup>

Pohybová rovnice netlumeného harmonického oscilátoru nám vyšla ve tvaru

$$m\ddot{x} = -kx \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0, \quad (2.13)$$

viz (1.123) a (1.124) na str. 48, a podle (1.125) na téže straně je jejím řešením funkce

$$x(t) = A \sin(\Omega t + \phi), \quad \text{kde} \quad \Omega \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (2.14)$$

odkud derivací dostáváme závislost rychlosti na čase:

$$\dot{x}(t) = \Omega A \cos(\Omega t + \phi). \quad (2.15)$$

Integrační konstanty  $A$  a  $\phi$  se určí z počátečních podmínek  $x(0) = x_0$  a  $\dot{x}(0) = v_0$ .

Veličině  $\Omega$  budeme říkat *vlastní úhlová frekvence netlumeného harmonického oscilátoru* nebo *úhlová frekvence netlumených kmitů*.

### Mechanická energie

V předchozí kapitole jsme se v odst. 1.8.1 na str. 46 poprvé zabývali netlumeným harmonickým oscilátorem. Tam jsme odvodili následující vztah pro mechanickou energii oscilátoru jako součet kinetické a potenciální energie, viz vztahy (1.132) a (1.133) na str. 49:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2. \quad (2.16)$$

Na těleso  $m$  působí jediná konzervativní síla (od pružiny), a proto očekáváme, že mechanická energie  $E$  harmonického oscilátoru bude konstantní. Pojďme si tento předpoklad ověřit. Vyjádříme proto časovou derivaci mechanické energie (2.16):

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 \right) = m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} = (m\ddot{x} + kx)\dot{x}.$$

<sup>1</sup>Viz např. D. Halliday, R. Resnick, J. Walker: *Fyzika*. 2. vydání, VUTIUM, Brno 2013, kap. 7, vztah (7.21).

Vzhledem k tomu, že platí pohybová rovnice (2.13), závorka musí být nulová a tedy i derivace mechanické energie podle času je vždy rovna nule. To ovšem znamená, že samotná mechanická energie musí být konstantní.

Nyní zjistíme, jaké konstantě je rovna. Pomocí vztahů (2.14) a (2.15) ji vyjádříme následujícím způsobem:

$$E = \frac{1}{2}m\Omega^2 A^2 \cos^2(\Omega t + \phi) + \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\Omega t + \phi).$$

Z (2.14) dále plyne, že  $m\Omega^2 = k$ , a proto

$$E = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\Omega t + \phi) + \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\Omega t + \phi) = \frac{1}{2}kA^2. \quad (2.17)$$

Dokázali jsme tedy, že mechanická energie netlumeného harmonického oscilátoru je rovna konstantě  $\frac{1}{2}kA^2$ . Stejný výsledek jsme obdrželi v předchozí kapitole na str. 49.

### 2.2.1 Harmonické kmitý v komplexním tvaru

Řešení pohybové rovnice (2.13) můžeme vyjádřit ještě jiným způsobem. Tento přístup nám v budoucnu usnadní matematický popis pohybu komplikovanějších kmitajících soustav, např. tlumeného harmonického oscilátoru či buzených kmitů.

Přepíšme si pohybovou rovnici (2.13) s použitím (2.14) do tvaru

$$\ddot{x} + \Omega^2 x = 0 \quad (2.18)$$

a předpokládejme její řešení jako<sup>2</sup>

$$x(t) = a \exp(bt), \quad (2.19)$$

kde  $a$  a  $b$  jsou konstanty.<sup>3</sup> Předpokládané řešení  $x(t)$  podle (2.19) a zrychlení, které je rovno druhé derivaci  $x(t)$  podle času:

$$\ddot{x} = ab^2 \exp(bt),$$

dosadíme zpět do pohybové rovnice (2.18), čímž dostáváme

$$ab^2 \exp(bt) + \Omega^2 a \exp(bt) = 0 \quad \Rightarrow \quad a \exp(bt) (b^2 + \Omega^2) = 0. \quad (2.20)$$

Aby byla levá strana rovnice (2.20) v každém okamžiku  $t$  nulová, musí být závorka rovna nule, neboli musí platit:

$$b^2 = -\Omega^2. \quad (2.21)$$

Vidíme, že k vyjádření  $b$  potřebujeme odmocnit záporné číslo. To provedeme užitím imaginární jednotky „i“, která je definována vztahem (3.15)

$$i \equiv \sqrt{-1} \quad (2.22)$$

uvedeným v dodatku B na str. 235. Pak podle (2.21) bude konstanta  $b$  nabývat dvou hodnot:

$$b = \pm\sqrt{-\Omega^2} = \pm\sqrt{-1}\sqrt{\Omega^2} = \pm i\Omega. \quad (2.23)$$

<sup>2</sup>Použitou funkcí  $\exp(z)$  se rozumí exponenciální funkce  $e^z$ .

<sup>3</sup>Konstanta  $\phi$ , kterou jsme použili v řešení (2.14) a nyní ji označíme  $c$ , již není třeba, neboť ji v tomto případě lze zahrnout do konstanty  $a$  tak, že vznikne nová konstanta  $a'$ :

$$a \exp(bt + c) = a \exp(bt) \exp(c) = a' \exp(bt), \quad \text{kde} \quad a' \equiv a \exp(c).$$

Řešení pohybové rovnice (2.18) v předpokládaném tvaru (2.19) nám tedy vyšla dvě a říkáme jim partikulární řešení. Obecné řešení je pak rovno lineární kombinaci obou partikulárních řešení, tj.

$$x(t) = a_+ \exp(i\Omega t) + a_- \exp(-i\Omega t), \quad (2.24)$$

kde  $a_+$  a  $a_-$  jsou zatím blíže neurčené konstanty. Nyní se přesvědčíme o tom, že funkce ve tvaru (2.24) je řešením pohybové rovnice (2.18). Nejprve vyjádříme druhou derivaci funkce  $x(t)$  danou vztahem (2.24):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= i\Omega a_+ \exp(i\Omega t) - i\Omega a_- \exp(-i\Omega t), \\ \ddot{x} &= -\Omega^2 a_+ \exp(i\Omega t) - \Omega^2 a_- \exp(-i\Omega t), \end{aligned} \quad (2.25)$$

neboť podle (2.22) platí

$$i \cdot i = i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1.$$

A potom do pohybové rovnice (2.18) dosadíme za  $x$  a  $\ddot{x}$  ze vztahů (2.24) a (2.25):

$$-\Omega^2 a_+ \exp(i\Omega t) - \Omega^2 a_- \exp(-i\Omega t) + \Omega^2 [a_+ \exp(i\Omega t) + a_- \exp(-i\Omega t)] = 0.$$

Vidíme, že levá strana této rovnice je nulová v jakémkoli okamžiku  $t$ , a proto funkce (2.24) je vskutku řešením pohybové rovnice (2.18). Pro porozumění tomu, jakých hodnot nabývá funkce  $\exp(\pm i\Omega t)$ , využijeme Eulerův vzorec, jehož odvození je uvedeno v Dodatku B na str. 236. S pomocí vztahu (3.24) na téže straně a záměnou  $\alpha$  za  $\Omega t$  potom dostáváme

$$\exp(\pm i\Omega t) = \cos(\Omega t) \pm i \sin(\Omega t). \quad (2.26)$$

To znamená, že zatímco na levé straně ve vztahu (2.24) je reálná funkce  $x(t)$  popisující výchylky oscilátoru, na pravé straně se nachází lineární kombinace komplexních funkcí  $\exp(\pm i\Omega t)$ .

Jak „zařídíme“, aby nakonec i pravá strana představovala reálnou funkci? Ukážeme, že je nutné, aby konstanty  $a_+$  a  $a_-$  náležely do oboru komplexních čísel a navíc byly navzájem komplexně sdružené.<sup>4</sup> Jsou-li konstanty  $a_+$  a  $a_-$  komplexně sdružené, musí platit

$$a_+ = a' + ia'', \quad a_- = a' - ia'',$$

kde  $a'$  je reálná část a  $a''$  imaginární část komplexní konstanty  $a_+$ . Užitím (2.26) pak můžeme řešení (2.24) přepsat takto:

$$\begin{aligned} x(t) &= (a' + ia'')[\cos(\Omega t) + i \sin(\Omega t)] + (a' - ia'')[\cos(\Omega t) - i \sin(\Omega t)] = \\ &= a' \cos(\Omega t) + ia' \sin(\Omega t) + ia'' \cos(\Omega t) - a'' \sin(\Omega t) + \\ &+ a' \cos(\Omega t) - ia' \sin(\Omega t) - ia'' \cos(\Omega t) - a'' \sin(\Omega t) = \\ &= 2a' \cos(\Omega t) - 2a'' \sin(\Omega t). \end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že reálná část  $a'$  i imaginární část  $a''$  komplexní konstanty  $a_+$  jsou již reálnými čísly, i funkce  $x(t)$  je reálnou funkcí, což jsme chtěli ukázat. Navíc vzhledem k tomu, že pohybová rovnice (2.18) je diferenciální rovnicí druhého řádu (obsahuje nejvýše druhou derivaci), musely se objevit právě dvě integrační konstanty. Nyní zbývá nahradit dvojici těchto (reálných) integračních konstant  $a'$  a  $a''$  jinou dvojicí (reálných) konstant  $A$  a  $\phi$  pomocí následujících vztahů:

$$2a' = A \sin \phi, \quad 2a'' = -A \cos \phi.$$

<sup>4</sup>Stručný úvod do pravidel počtů s komplexními čísly, které budeme nyní používat, je uveden v Dodatku B na str. 235.

Potom užitím goniometrického vzorce  $\cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha + \beta)$  dostáváme konečný tvar řešení pohybové rovnice (2.18):

$$x(t) = A \cos(\Omega t) \sin(\phi) + A \sin(\Omega t) \cos(\phi) = A \sin(\Omega t + \phi). \quad (2.27)$$

Tento výsledek je samozřejmě zcela shodný s předchozím, viz (2.14).

Pro vyjádření reálné funkce  $x(t)$  jako řešení pohybové rovnice (2.18) bychom mohli postupovat i takto: Namísto lineární kombinace (2.24) obou partikulárních řešení se  $x(t)$  bude rovnat reálné části<sup>5</sup> jednoho z partikulárních řešení, např.  $a_+ \exp(i\Omega t)$ :

$$x(t) = \operatorname{Re}\{a_+ \exp(i\Omega t)\}. \quad (2.28)$$

V Dodatku B ve vztahu (3.28) na str. 238 je ukázáno, že komplexní číslo  $a_+$  lze vyjádřit buď pomocí jeho reálné části  $a'$  a imaginární části  $a''$ , anebo pomocí jeho velikosti  $|a_+|$  a jeho fáze  $\varphi$ :

$$a_+ = a' + ia'' = |a_+| \exp(i\varphi).$$

Dosazením do (2.28) pak  $x(t)$  vyjádříme takto:

$$\begin{aligned} x(t) &= \operatorname{Re}\{|a_+| \exp(i\Omega t) \exp(i\varphi)\} = \operatorname{Re}\{|a_+| \exp[i(\Omega t + \varphi)]\} = \\ &= \operatorname{Re}\{|a_+| \cos(\Omega t + \varphi) + i|a_+| \sin(\Omega t + \varphi)\} = |a_+| \cos(\Omega t + \varphi). \end{aligned}$$

Záměnamí  $A \equiv |a_+|$  a  $\phi \equiv \varphi - \pi/2$  pak opět dostáváme

$$x(t) = A \cos(\Omega t + \phi - \pi/2) = A \sin(\Omega t + \phi).$$

Všechny tři způsoby popsané vztahy (2.14), (2.24) a (2.28) vedou na touž reálnou funkci, která popisuje kmitý dané veličiny (zde výchylky harmonického oscilátoru) a obsahuje dvě nezávislé reálné konstanty určené dvěma počátečními podmínkami  $x(0) = x_0$  a  $\dot{x}(0) = v_0$ . Proto jsou všechny zápisy typu

$$\begin{aligned} &A \sin(\Omega t + \phi), \\ &A \cos(\Omega t + \varphi), \quad \text{kde } \varphi \equiv \phi - \pi/2, \\ &a_+ \exp(i\Omega t) + a_- \exp(-i\Omega t), \\ &\operatorname{Re}\{a_{\pm} \exp(\pm i\Omega t)\} \end{aligned}$$

ekvivalentní.

Veličinám, jejichž časový průběh se řídí funkcí sinus nebo kosinus s argumentem lineárně závislým na čase, říkáme *harmonicky kmitající veličiny* nebo *harmonické kmitý*. Pokud je časový průběh roven součtu více harmonických kmitů, někdy jim budeme říkat též i *harmonické příspěvky* či *harmonické složky*.

### Komplexní zápis harmonicky kmitajících veličin

Z předchozího nám plyne, že se budeme vždy snažit postupovat následovně: Abychom si manipulaci s harmonicky kmitajícími veličinami co nejvíce usnadnili, budeme je zapisovat v komplexním tvaru

$$a \exp(i\Omega t) \quad (2.29)$$

<sup>5</sup>Pojem reálná (a imaginární) část komplexního čísla nebo komplexní funkce je popsán v Dodatku B na str. 235.

co nejdéle to bude možné. Jelikož komplexní amplituda  $a$  je tvořena dvěma čísly: amplitudou kmitů  $|a|$  a fází  $\varphi$ , přičemž platí  $a = |a| \exp(i\varphi)$ , na konci celého výpočtu kmitající veličinu nahradíme reálnou funkcí

$$|a| \cos(\Omega t + \varphi)$$

nebo

$$|a| \sin(\Omega t + \varphi - \pi/2) = |a| \sin(\Omega t + \phi).$$

Nyní je zřejmé, proč je  $\varphi$  nazývána fází: V čase  $t = 0$  má daná kmitající veličina počáteční fází  $\varphi$ , pokud použijeme funkci kosinus, nebo  $\phi \equiv \varphi - \pi/2$ , pokud použijeme funkci sinus.

## 2.3 Tlumený harmonický oscilátor

Abychom docenili „pohodlí“, když při řešení mnoha typů úloh používáme reálné i komplexní exponenciální funkce, vyšetříme pohyb tlumeného harmonického oscilátoru. Zadání zůstává stejné, jako v předchozí úloze o netlumeném harmonickém oscilátoru, viz odst. 2.2 na str. 138, jen přidáme tlumicí sílu, která je úměrná okamžité rychlosti. Její průmět do osy  $x$  tedy můžeme zapsat výrazem

$$F^{\text{tlum}} = -B\dot{x}, \quad (2.30)$$

kde  $B$  je kladná reálná konstanta charakterizující míru tlumení. Záporné znaménko znamená, že síla působí vždy v opačném směru vzhledem k rychlosti tělesa  $m$ . Pohybová rovnice (2.13) tedy bude nyní nově obsahovat kromě vratné síly  $-kx$  i tuto tlumicí sílu:

$$m\ddot{x} = -kx - B\dot{x} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \frac{B}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0. \quad (2.31)$$

Kromě vlastní úhlové frekvence  $\Omega \equiv \sqrt{k/m}$ , viz (2.14), dále ještě definujeme tlumicí konstantu

$$\gamma \equiv \frac{B}{m}. \quad (2.32)$$

Pohybová rovnice (2.31) má tedy tvar obyčejné diferenciální rovnice druhého řádu, ve které je nyní navíc i první derivace hledané funkce  $x(t)$ :

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \Omega^2x = 0. \quad (2.33)$$

Z jejího tvaru již ihned vidíme, že vyjádření řešení pomocí funkce sinus nebo kosinus bude vyžadovat zvládnutou manipulaci s goniometrickými vzorci. Budeme-li však předpokládat její řešení ve tvaru

$$x(t) = a \exp(bt), \quad (2.34)$$

goniometrickým vzorcům se vyhneme. Nejprve vyjádříme první a druhou derivaci funkce (2.34):

$$\dot{x} = ba \exp(bt) = bx(t), \quad \ddot{x} = b^2a \exp(bt) = b^2x(t)$$

a obojí dosadíme zpět do pohybové rovnice (2.33):

$$b^2x(t) + \gamma bx(t) + \Omega^2x(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad (b^2 + \gamma b + \Omega^2)x(t) = 0.$$

Aby byla levá strana vždy nulová, musí být závorka rovna nule. Tím dostáváme tzv. *charakteristickou rovnici* diferenciální rovnice (2.33) ve tvaru kvadratické rovnice:

$$b^2 + \gamma b + \Omega^2 = 0, \quad (2.35)$$

jejíž oba kořeny jsou následující:

$$b_{1,2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\gamma^2 - 4\Omega^2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \Omega^2}. \quad (2.36)$$

Vzhledem k tomu, že se pod odmocninou nachází rozdíl dvou členů, jež mohou mít libovolné hodnoty, je vhodné řešení dále diskutovat podle relací mezi nimi. Tomu se budeme věnovat v následujících odstavcích. Již nyní však můžeme učinit úvahu o tom, jaký bude pohyb tlumeného harmonického oscilátoru po velmi dlouhé době, tj. když  $t \rightarrow \infty$ . Vzhledem k tomu, že podle (2.36) je  $b_1$  i  $b_2$  záporné, tvar řešení (2.34) způsobí, že

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 = x_e, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{x}(t) = 0, \quad (2.37)$$

kde  $x_e$  je rovnovážná poloha, viz (2.7). Tento výsledek říká, že v důsledku působení tlumicí síly se těleso postupně dostává do rovnovážné polohy a jeho rychlost se blíží nule. Uvidíme, že tento závěr platí pro jakýkoli tlumený harmonický oscilátor, pokud je tlumicí síla úměrná rychlosti  $\dot{x}$ . Je-li tlumení realizováno prostřednictvím třecí síly, tento závěr neplatí, jak zjistíme dále.

### 2.3.1 Silné tlumení

*Silně tlumeným* harmonickým oscilátorem myslíme případ, kdy

$$\frac{\gamma}{2} > \Omega \quad \Rightarrow \quad B > 2\sqrt{mk}.$$

Potom kořeny (2.36) kvadratické rovnice (2.35) jsou reálné a obecné řešení pohybové rovnice (2.33) je rovno lineární kombinaci parikulárních řešení (2.34) pro jednotlivá  $b_1$  a  $b_2$ :

$$x(t) = a_1 \exp(b_1 t) + a_2 \exp(b_2 t), \quad (2.38)$$

kde  $a_1$  a  $a_2$  musí být nyní reálné konstanty, neboť i obě exponenciální funkce mají v argumentu reálná čísla. Okamžitá rychlost tělesa  $m$  potom bude

$$\dot{x}(t) = a_1 b_1 \exp(b_1 t) + a_2 b_2 \exp(b_2 t). \quad (2.39)$$

Abychom ukázali, jaký je časový vývoj výchylky silně tlumeného harmonického oscilátoru popsany funkcí (2.38), předpokládejme počáteční podmínky ve tvaru

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = 0. \quad (2.40)$$

Potom z (2.38) a (2.39) plyne, že

$$x(0) = a_1 + a_2 = x_0, \quad \dot{x}(0) = a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0.$$

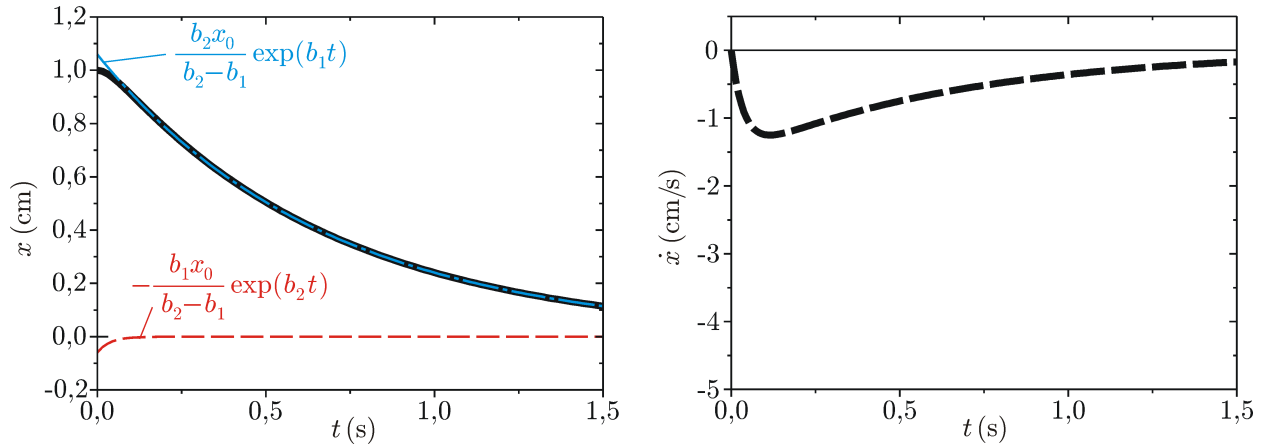
Tím dostáváme soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých  $a_1$  a  $a_2$ , jejíž řešeními jsou

$$a_1 = \frac{b_2}{b_2 - b_1} x_0, \quad a_2 = -\frac{b_1}{b_2 - b_1} x_0. \quad (2.41)$$

Po dosazení za  $a_1$  a  $a_2$  do (2.38) potom dostáváme následující řešení pohybové rovnice (2.33) s počátečními podmínkami (2.40):

$$x(t) = \frac{b_2 x_0}{b_2 - b_1} \exp(b_1 t) - \frac{b_1 x_0}{b_2 - b_1} \exp(b_2 t). \quad (2.42)$$





Obrázek 2.2: Vlevo: Časový vývoj výchylky  $x(t)$  silně tlumeného harmonického oscilátoru (černá plná křivka) podle (2.42), pro který platí  $\Omega = 4\pi \text{ s}^{-1}$ ,  $\gamma/2 = \Omega\sqrt{5}/2 \cong 1,12\Omega$  a  $x_0 = 1 \text{ cm}$ . Jsou rovněž ukázány i průběhy jednotlivých funkcí  $b_2x_0 \exp(b_1t)/(b_2 - b_1)$  (modrá křivka) a  $-b_1x_0 \exp(b_2t)/(b_2 - b_1)$  (červená přerušovaná křivka), jejichž součtu je závislost  $x(t)$  rovna. Vpravo: Časový vývoj rychlosti  $\dot{x}(t)$  podle (2.43) pro stejné  $\Omega$ ,  $\gamma$  a  $x_0$ .

Rychlost silně tlumeného harmonického oscilátoru s počátečními podmínkami (2.40) potom vyjde takto:

$$\dot{x}(t) = \frac{b_1 b_2 x_0}{b_2 - b_1} \exp(b_1 t) - \frac{b_2 b_1 x_0}{b_2 - b_1} \exp(b_2 t) = \frac{b_1 b_2 x_0}{b_2 - b_1} [\exp(b_1 t) - \exp(b_2 t)]. \quad (2.43)$$

Na obr. 2.2 jsou zobrazeny ukázky grafů  $x(t)$  a  $\dot{x}(t)$  s počátečními podmínkami (2.40).

Vzhledem k tomu, že v řešení (2.42) se nacházejí pouze exponenciální funkce reálných proměnných, poloha silně tlumeného harmonického oscilátoru nikdy nepřekoná rovnovážnou polohu. Pohyb takového oscilátoru tedy nemá kmitavý charakter.

### Velmi silné tlumení

Pokud je *tlumení velmi silné*, tj.  $\gamma/2 \gg \Omega$ , potom z (2.36) plyne<sup>6</sup>

$$b_1 = -\frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma}{2} \sqrt{1 - \frac{4\Omega^2}{\gamma^2}} \cong -\frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma}{2} \left(1 - \frac{2\Omega^2}{\gamma^2}\right) = -\frac{\Omega^2}{\gamma},$$

$$b_2 = -\frac{\gamma}{2} - \frac{\gamma}{2} \sqrt{1 - \frac{4\Omega^2}{\gamma^2}} \cong -\gamma.$$

<sup>6</sup>Použitá aproximace spočívá v tom, že vezmeme pouze první dva členy Taylorova rozvoje funkce  $\sqrt{1-s}$  okolo  $s=0$ :

$$\sqrt{1-s} = 1 - \frac{1}{2}s - \frac{1}{8}s^2 - \frac{1}{16}s^3 - \dots,$$

neboť argument  $s$  je v tomto případě velmi malý vůči 1.

Řešení (2.42) potom nalezneme v přibližném tvaru

$$\begin{aligned}
 x(t) &\cong \frac{-\gamma x_0}{-\gamma + \Omega^2/\gamma} \exp(-\Omega^2 t/\gamma) + \frac{\Omega^2 x_0/\gamma}{-\gamma + \Omega^2/\gamma} \exp(-\gamma t) = \\
 &= \frac{x_0}{1 - \Omega^2/\gamma^2} \exp(-\Omega^2 t/\gamma) + \frac{\Omega^2 x_0/\gamma^2}{\Omega^2/\gamma^2 - 1} \exp(-\gamma t) \cong \\
 &\cong x_0 \exp(-\Omega^2 t/\gamma) - \frac{\Omega^2 x_0}{\gamma^2} \exp(-\gamma t) \cong x_0 \exp(-\Omega^2 t/\gamma). \tag{2.44}
 \end{aligned}$$

Z výsledku je zřejmé, že čím větší je tlumicí konstanta  $\gamma$ , tím pomaleji se oscilátor vrací zpět do rovnovážného stavu.

### 2.3.2 Slabé tlumení

*Slabé tlumení* nastává tehdy, když

$$\frac{\gamma}{2} < \Omega \quad \Rightarrow \quad B < 2\sqrt{mk}.$$

V takovém případě je pod odmocninou v (2.36) záporné číslo, a proto využijeme imaginární jednotku  $i \equiv \sqrt{-1}$ :

$$b_{1,2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{-1} \sqrt{\Omega^2 - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2} = -\frac{\gamma}{2} \pm i\Omega', \tag{2.45}$$

kde jsme zavedli novou konstantu

$$\Omega' \equiv \sqrt{\Omega^2 - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}. \tag{2.46}$$

Obecné řešení pohybové rovnice (2.33) je opět rovno lineární kombinaci parikulárních řešení (2.34) pro jednotlivá  $b_1$  a  $b_2$ , neboli

$$\begin{aligned}
 x(t) &= a_+ \exp(-\gamma t/2 + i\Omega' t) + a_- \exp(-\gamma t/2 - i\Omega' t) = \\
 &= \exp(-\gamma t/2) [a_+ \exp(i\Omega' t) + a_- \exp(-i\Omega' t)]. \tag{2.47}
 \end{aligned}$$

kde  $a_+$  a  $a_-$  jsou v tomto případě komplexní konstanty. V hranaté závorce poznáváme výraz (2.24), který popisuje kmity netlumeného harmonického oscilátoru, avšak tentokrát s úhlovou frekvencí  $\Omega'$ . Z předchozího odstavce dále víme, že výraz v hranaté závorce vede na  $A \cos(\Omega' t + \phi)$  nebo  $A \sin(\Omega' t + \phi)$ , kde  $\phi = \varphi - \pi/2$ . Kmity slabě tlumeného harmonického oscilátoru tedy popisuje funkce

$$x(t) = A \exp(-\gamma t/2) \sin(\Omega' t + \phi). \tag{2.48}$$

Rychlost tělesa  $m$  je potom určena funkcí

$$\begin{aligned}
 \dot{x}(t) &= -\frac{\gamma}{2} A \exp(-\gamma t/2) \sin(\Omega' t + \phi) + \Omega' A \exp(-\gamma t/2) \cos(\Omega' t + \phi) = \\
 &= \Omega' A \exp(-\gamma t/2) \left[ \cos(\Omega' t + \phi) - \frac{\gamma}{2\Omega'} \sin(\Omega' t + \phi) \right]. \tag{2.49}
 \end{aligned}$$

Zvolme nyní počáteční podmínky ve tvaru

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = v_0, \tag{2.50}$$

neboli v čase  $t = 0$  se těleso  $m$  nachází v rovnovážné poloze a má počáteční rychlost  $v_0$ . Potom

$$x(0) = A \sin \phi = 0, \quad \dot{x}(0) = \Omega' A \cos \phi - \frac{\gamma}{2} A \sin \phi = v_0.$$

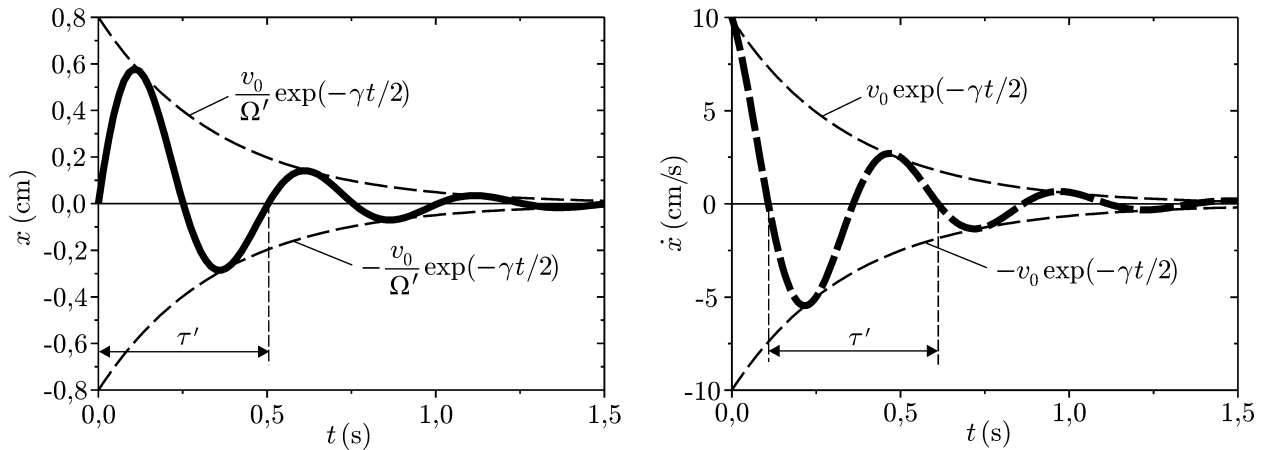
Z první rovnice ihned plyne, že  $\phi = 0$ , a ze druhé potom  $A = v_0/\Omega'$ . Poloha  $x(t)$  a rychlost  $\dot{x}(t)$  slabě tlumeného harmonického oscilátoru s počátečními podmínkami (2.50) tedy jsou podle (2.48) a (2.49) popsány funkcemi:

$$x(t) = \frac{v_0}{\Omega'} \exp(-\gamma t/2) \sin \Omega' t \quad (2.51)$$

a

$$\dot{x}(t) = v_0 \exp(-\gamma t/2) \left( \cos \Omega' t - \frac{\gamma \sin \Omega' t}{2\Omega'} \right). \quad (2.52)$$

Ukázky grafů funkcí (2.51) a (2.52) jsou zobrazeny na obr. 2.3. Vidíme, že časový průběh výchylky tlumeného harmonického oscilátoru je roven součinu kmitů určených funkcí  $\sin(\Omega' t + \phi)$  a klesající amplitudy kmitů, jejíž průběh je popsán funkcí  $A \exp(-\gamma t/2)$ . Vztah (2.46) říká, že úhlová frekvence  $\Omega'$  tlumeného harmonického oscilátoru je nižší než úhlová frekvence  $\Omega \equiv \sqrt{k/m}$  netlumeného harmonického oscilátoru tvořeného pružinou o stejné tuhosti  $k$  a tělesem o stejné hmotnosti  $m$ . Perioda tlumených kmitů  $\tau' = 2\pi/\Omega'$  je tedy naopak větší než perioda netlumených kmitů  $\tau = 2\pi/\Omega$ .



Obrázek 2.3: Vlevo: Časový vývoj výchylky  $x(t)$  slabě tlumeného harmonického oscilátoru (plná křivka) podle (2.51), pro který platí  $\Omega = 4\pi \text{ s}^{-1}$  a  $\gamma/2 = 2\Omega/9 \cong 0,22\Omega$ , odkud  $\Omega' = 4\pi\sqrt{77}/9 \text{ s}^{-1} \cong 0,97\Omega$ . Dále platí  $v_0 = 10 \text{ cm/s}$ . Jsou rovněž ukázány i funkce  $\pm(v_0/\Omega') \exp(-\gamma t/2)$  (přerušované křivky). Vpravo: Časový vývoj rychlosti  $\dot{x}(t)$  podle (2.52) pro stejné  $\Omega$ ,  $\gamma$  a  $v_0$ . Pro periodu tlumených kmitů platí:  $\tau' = 2\pi/\Omega' \cong 0,513 \text{ s} > \tau$ , kde  $\tau = 2\pi/\Omega = 0,5 \text{ s}$  je perioda netlumených kmitů.

### Mechanická energie

Na těleso  $m$  působí kromě konzervativní síly (od pružiny) i tlumící síla, která je nekonzervativní, a proto očekáváme, že se mechanická energie  $E$  tlumeného harmonického oscilátoru bude měnit. Toto tvrzení nejdříve dokážeme pro jakýkoli typ tlumení. Opět vyjádříme časovou derivaci mechanické energie (2.16):

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2 \right) = m \dot{x} \ddot{x} + k x \dot{x} = (m \ddot{x} + k x) \dot{x}.$$

Podle pohybové rovnice (2.31) je však nyní závorka rovna  $-B\dot{x}$ . Platí tedy, že

$$\frac{dE}{dt} = -B\dot{x}^2 \leq 0. \quad (2.53)$$

Tento výsledek nám říká, že mechanická energie klesá úměrně kvadrátu rychlosti  $\dot{x}$ . Kdykoli je v nějakém okamžiku rychlost nulová, pro tento okamžik dojde k zastavení poklesu  $E$ .

Tento závěr ukážeme pro názornost na fyzikálně nejzajímavějším případě slabého tlumení. Po dosazení rychlosti  $\dot{x}(t)$  podle (2.52) a výchylky  $x(t)$  podle (2.51) do kinetické a potenciální energie v (2.16) dostáváme:

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \\ &= \frac{1}{2}m \left[ v_0 \exp(-\gamma t/2) \left( \cos \Omega' t - \frac{\gamma \sin \Omega' t}{2\Omega'} \right) \right]^2 + \frac{1}{2}k \left[ \frac{v_0}{\Omega'} \exp(-\gamma t/2) \sin \Omega' t \right]^2 = \\ &= \frac{1}{2}mv_0^2 \exp(-\gamma t) \left[ \left( \cos \Omega' t - \frac{\gamma \sin \Omega' t}{2\Omega'} \right)^2 + \frac{k}{m\Omega'^2} \sin^2 \Omega' t \right]. \end{aligned}$$

Protože ze vztahů (2.14) a (2.46) plyne  $k/m = \Omega^2 = \Omega'^2 + (\gamma/2)^2$ ,

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2}mv_0^2 \exp(-\gamma t) \left[ \cos^2 \Omega' t - \frac{\gamma}{\Omega'} \sin(\Omega' t) \cos(\Omega' t) + \frac{\Omega'^2 + 2(\gamma/2)^2}{\Omega'^2} \sin^2 \Omega' t \right] = \\ &= \frac{1}{2}mv_0^2 \exp(-\gamma t) \left[ 1 - \frac{\gamma}{\Omega'} \sin(\Omega' t) \cos(\Omega' t) + \frac{2(\gamma/2)^2}{\Omega'^2} \sin^2 \Omega' t \right]. \end{aligned}$$

Nakonec využijeme goniometrických vzorců

$$\sin(\Omega' t) \cos(\Omega' t) = \frac{1}{2} \sin(2\Omega' t), \quad \sin^2 \Omega' t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\Omega' t)$$

a tím dostáváme

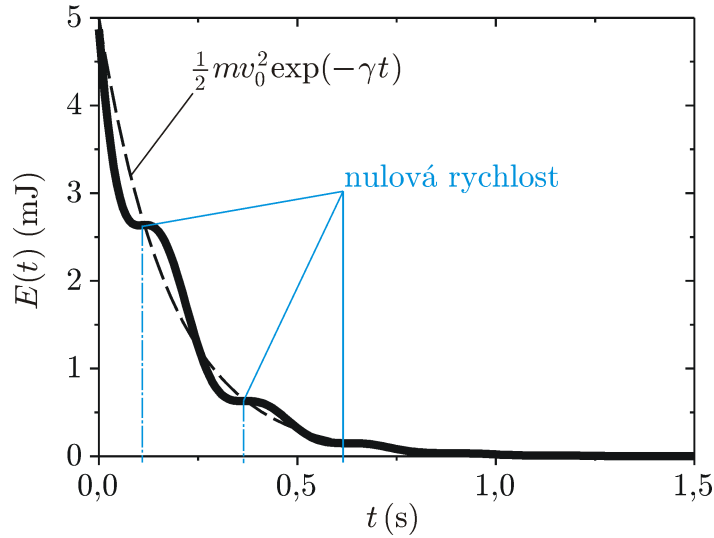
$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2}mv_0^2 \exp(-\gamma t) \left[ 1 - \frac{\gamma}{2\Omega'} \sin(2\Omega' t) + \frac{(\gamma/2)^2}{\Omega'^2} - \frac{(\gamma/2)^2}{\Omega'^2} \cos(2\Omega' t) \right] = \\ &= \frac{1}{2}mv_0^2 \exp(-\gamma t) \left[ \frac{\Omega'^2 + (\gamma/2)^2}{\Omega'^2} - \frac{\gamma}{2\Omega'} \sin(2\Omega' t) - \frac{\gamma^2}{4\Omega'^2} \cos(2\Omega' t) \right] = \\ &= \frac{1}{2}mv_0^2 \exp(-\gamma t) \left[ \frac{\Omega^2}{\Omega'^2} - \frac{\gamma}{2\Omega'} \sin(2\Omega' t) - \frac{\gamma^2}{4\Omega'^2} \cos(2\Omega' t) \right]. \quad (2.54) \end{aligned}$$

Na obr. 2.4 vidíme ukázkou průběhu mechanické energie slabě tlumeného harmonického oscilátoru. Parametry jsou nastaveny stejně jako na obr. 2.3. Je vidět, že pokles mechanické energie se zastaví vždy, když je rychlost tělesa  $m$  nulová. Důvodem je fakt, že tlumicí síla, která je zodpovědná za pokles mechanické energie a je úměrná rychlosti, je v takových okamžicích právě rovna nule. Naopak k největšímu poklesu  $E$  dochází, když je velikost rychlosti maximální. Tohoto jevu jsme si již všimli při rozebírání vztahu (2.53).

### Velmi slabé tlumení

Pokud platí

$$\frac{\gamma}{2} \ll \Omega,$$



Obrázek 2.4: Časový vývoj mechanické energie  $E(t)$  slabě tlumeného harmonického oscilátoru (plná křivka) podle (2.54) se stejnými parametry jako na obr. 2.3, tj.  $\Omega = 4\pi \text{ s}^{-1}$  a  $\gamma/2 = 2\Omega/9 \cong 0,22 \Omega$ , odkud  $\Omega' = 4\pi\sqrt{77}/9 \text{ s}^{-1} \cong 0,97 \Omega$ , a dále  $v_0 = 10 \text{ cm/s}$ . Navíc  $m = 1 \text{ kg}$ . Je rovněž ukázána funkce  $\frac{1}{2}mv_0^2 \exp(-\gamma t)$  (přerušovaná křivka). Okamžiky nulové rychlosti (modré rysky) vždy splývají se zastavením poklesu mechanické energie, srv. s obr. 2.3 vpravo.

jde o *velmi slabé tlumení*. V takovém případě lze v (2.46) výraz  $(\gamma/2)^2$  zanedbat vůči  $\Omega^2$  a tedy úhlová frekvence  $\Omega'$  kmitů tlumeného harmonického oscilátoru je přibližně rovna úhlové frekvenci  $\Omega$  netlumených kmitů:

$$\Omega' = \sqrt{\Omega^2 - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2} \cong \Omega'. \quad (2.55)$$

Dále můžeme podle (2.51) a (2.52) přibližně vyjádřit i výchylku  $x(t)$  a rychlost  $\dot{x}(t)$  oscilátoru pro počáteční podmínky (2.50):

$$\begin{aligned} x(t) &\cong \frac{v_0}{\Omega} \exp(-\gamma t/2) \sin \Omega t, \\ \dot{x}(t) &\cong v_0 \exp(-\gamma t/2) \cos \Omega t. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Nyní vidíme, že čím menší je tlumicí konstanta  $\gamma$ , tím pomaleji se amplituda kmitů oscilátoru blíží nule a tím i k rovnovážné poloze, narozdíl od silně tlumeného harmonického oscilátoru, viz (2.44).

### 2.3.3 Kritické tlumení

Poslední případ, který může nastat je tzv. *kritické tlumení*. Jde o situaci, kdy

$$\frac{\gamma}{2} \rightarrow \Omega \quad \Rightarrow \quad B \rightarrow 2\sqrt{mk}.$$

Potom konstanty  $b_1$  a  $b_2$  definované vztahem (2.36) můžeme vyjádřit pomocí následujících limit:

$$b_{1,2} = \lim_{\gamma/2 \rightarrow \Omega} \left[ -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \Omega^2} \right] = -\frac{\gamma}{2} \pm \lim_{s \rightarrow 0} s, \quad (2.57)$$

kde

$$s \equiv \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \Omega^2}. \quad (2.58)$$

Využijme nyní toho, že jsme již v odst. 2.3.1 prozkoumali případ silného tlumení s počátečními podmínkami (2.40)

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = 0. \quad (2.59)$$

Po dosazení za  $b_1$  a  $b_2$  ze vztahu (2.57) do (2.42) potom dostáváme následující řešení pohybové rovnice (2.33) s počátečními podmínkami (2.59):

$$\begin{aligned} x(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \frac{\gamma/2 + s}{2s} x_0 \exp[(-\gamma/2 + s)t] - \frac{\gamma/2 - s}{2s} x_0 \exp[(-\gamma/2 - s)t] \right\} = \\ &= x_0 \exp(-\gamma t/2) \lim_{s \rightarrow 0} \left[ \frac{\gamma/2 + s}{2s} \exp(st) - \frac{\gamma/2 - s}{2s} \exp(-st) \right] = \\ &= x_0 \exp(-\gamma t/2) \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(\gamma/2 + s) \exp(st) - (\gamma/2 - s) \exp(-st)}{2s}. \end{aligned}$$

Vidíme, že se čítec i jmenovatel zlomku v limitě blíží nule, proto pomocí l'Hospitalova pravidla, kdy zderivujeme podle  $s$  zvlášť čítec a jmenovatel, dostáváme:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \exp(-\gamma t/2) \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\exp(st) + (\gamma/2 + s)t \exp(st) + \exp(-st) + (\gamma/2 - s)t \exp(-st)}{2} = \\ &= x_0 \exp(-\gamma t/2) \frac{2 + \gamma t}{2}. \end{aligned}$$

Po drobné úpravě tedy získáváme závislost výchylky  $x(t)$  kriticky tlumeného hramonického oscilátoru s počátečními podmínkami (2.59) ve tvaru

$$x(t) = x_0 \exp(-\gamma t/2) \left( 1 + \frac{\gamma t}{2} \right). \quad (2.60)$$

Rychlost  $\dot{x}(t)$  pak dostaneme derivací výchylky  $x(t)$ :

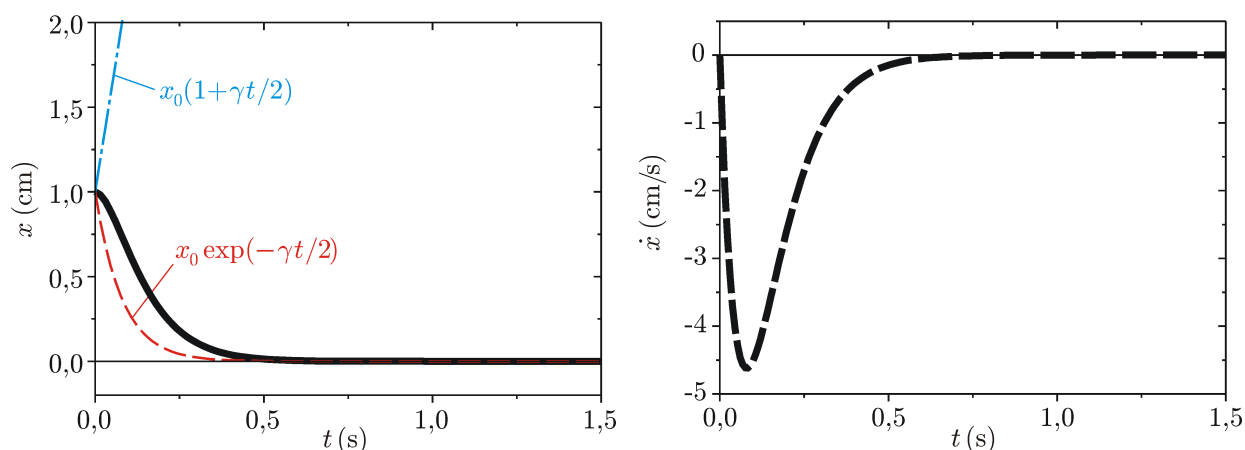
$$\dot{x}(t) = -\frac{\gamma x_0}{2} \exp(-\gamma t/2) \left( 1 + \frac{\gamma t}{2} \right) + \frac{\gamma x_0}{2} \exp(-\gamma t/2) = -\frac{\gamma^2 x_0}{4} t \exp(-\gamma t/2). \quad (2.61)$$

Na obr. 2.5 jsou ukázány příklady funkcí  $x(t)$  a  $\dot{x}(t)$  popisujících kmitu kriticky tlumeného harmonického oscilátoru s počátečními podmínkami (2.59).

Nyní porovnejme grafy výchylek slabě tlumeného (obr. 2.3), kriticky tlumeného (obr. 2.5) a silně tlumeného (obr. 2.2) harmonického oscilátoru, v nichž jsme vždy použili stejnou hodnotu  $\Omega \equiv \sqrt{k/m} = 4\pi \text{ s}^{-1}$ . Pokud budeme z nuly postupně zvyšovat tlumicí konstantu  $\gamma$ , oscilátor bude zprvu v režimu slabého tlumení a výchylka bude odpovídat tlumeným kmitům, jejichž amplituda se řídí funkcí  $\exp(-\gamma t/2)$ , viz (2.52). Zvyšování tlumicí konstanty tedy bude znamenat postupně rychlejší a rychlejší útlum kmitů. Tento vývoj bude pokračovat až do dosažení kritického tlumení, jehož výchylky se podle (2.60) stále ještě řídí funkcí  $\exp(-\gamma t/2)$ .

Pokud však budeme stále více zvyšovat tlumicí konstantu  $\gamma$ , po čase nastane režim velmi silného tlumení, které se řídí funkcí  $\exp(-\Omega^2 t/\gamma)$ , viz (2.44). Vidíme, že nyní dalším zvyšováním tlumení docílíme přesného opaku: pomalejšího návratu tělesa  $m$  do rovnovážné polohy.

Docházíme tedy k závěru, že nejrychleji se těleso  $m$  trvale přiblíží k rovnovážnému stavu právě při kritickém tlumení.



Obrázek 2.5: Vlevo: Časový vývoj výchylky  $x(t)$  kriticky tlumeného harmonického oscilátoru (plná křivka) podle (2.60), pro který platí  $\Omega = \gamma/2 = 4\pi \text{ s}^{-1}$  a  $x_0 = 1 \text{ cm}$ . Jsou rovněž ukázány i funkce  $x_0(1 + \gamma t/2)$  (modrá čerchovaná křivka)  $x_0 \exp(-\gamma t/2)$  (červená přerušovaná křivka). Vpravo: Časový vývoj rychlosti  $\dot{x}(t)$  podle (2.61) pro stejné  $\Omega$ ,  $\gamma$  a  $x_0$ .

## 2.4 Harmonický oscilátor tlumený třecí silou

Poněkud jiné jsou výchylky harmonického oscilátoru tlumeného třecí silou, jejíž velikost je konstantní. Vzhledem k tomu, že třecí síla vždy ukazuje v opačném směru než vektor rychlosti tělesa  $m$ , její průmět do osy  $x$  můžeme vyjádřit ve tvaru<sup>7</sup>

$$F_t = -\text{sgn}(\dot{x})|F_t| = -\text{sgn}(\dot{x})N\mu_d, \quad (2.62)$$

kde  $N$  je normálová síla, kterou působí podložka na těleso  $m$ , a  $\mu_d$  je *činitel dynamického tření* mezi podložkou a tělesem.<sup>8</sup> Do pohybové rovnice (2.13) harmonického oscilátoru tedy doplníme působení třecí síly:

$$m\ddot{x} = -kx - \text{sgn}(\dot{x})N\mu_d \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \frac{k}{m}x = -\text{sgn}(\dot{x})\frac{N\mu_d}{m}. \quad (2.63)$$

Abychom mohli odstranit funkci  $\text{sgn}$ , napíšeme tuto pohybovou rovnici pro dva případy:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = -\frac{N\mu_d}{m}, \quad \text{když } \dot{x} > 0, \quad (2.64)$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{N\mu_d}{m}, \quad \text{když } \dot{x} < 0. \quad (2.65)$$

<sup>7</sup>Ve výrazu použijeme funkci „signum“, již zapisujeme  $\text{sgn}(x)$  a která má následující funkční hodnoty:

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & \text{když } x > 0, \\ 0, & \text{když } x = 0, \\ -1, & \text{když } x < 0. \end{cases}$$

Tato funkce tedy vyjadřuje znaménko jejího argumentu.

<sup>8</sup>S činitelem dynamického tření jsme se setkali již v základním kurzu fyziky, viz např. D. Halliday, R. Resnick, J. Walker: *Fyzika*. 2. vydání, VUTIUM, Brno 2013, kap. 6, vztah (6.2).

Obě varianty představují obyčejnou diferenciální rovnici s konstantní pravou stranou, jejichž řešeními jsou funkce

$$x(t) = A \sin(\Omega t + \phi) - \frac{N\mu_d}{k}, \quad \text{když } \dot{x} > 0, \quad (2.66)$$

$$x(t) = A \sin(\Omega t + \phi) + \frac{N\mu_d}{k}, \quad \text{když } \dot{x} < 0, \quad (2.67)$$

kde  $\Omega \equiv \sqrt{k/m}$  je úhlová frekvence netlumených kmitů. Rychlost má pak pro každý z případů tvar

$$\dot{x}(t) = \Omega A \cos(\Omega t + \phi). \quad (2.68)$$

Kmity tlumené třecí silou budeme studovat za následujících počátečních podmínek:

$$x(0) = x_0 > 0, \quad \dot{x}(0) = 0. \quad (2.69)$$

Nejprve je třeba otestovat, zda vratná síla pružiny  $-kx_0$  je na začátku schopna překonat statickou třecí sílu, neboli musí platit

$$kx_0 > N\mu_s, \quad (2.70)$$

kde  $\mu_s$  je *činitel statického tření* mezi podložkou a tělesem.<sup>9</sup> Pokud je tato podmínka splněna, těleso  $m$  se začne pohybovat proti směru osy  $x$  a jde tedy o případ, kdy  $\dot{x} < 0$ . Z důvodů, které vyplynou později, označme integrační konstanty  $A_1$  a  $\phi_1$  namísto původních  $A$  a  $\phi$ . Lze se přesvědčit o tom, že dosazením počátečních podmínek (2.69) do vztahů (2.67) a (2.68) vyjdou následovně:

$$A_1 = x_0 - \frac{N\mu_d}{k}, \quad \phi_1 = \frac{\pi}{2}. \quad (2.71)$$

Během první půlperiody, tj.  $t \in \langle 0, \tau/2 \rangle$ , kde  $\tau = 2\pi/\Omega$ , jsou potom poloha a rychlost tělesa  $m$  popsány funkcemi

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{N\mu_d}{k}\right) \sin(\Omega t + \pi/2) + \frac{N\mu_d}{k} = \left(x_0 - \frac{N\mu_d}{k}\right) \cos \Omega t + \frac{N\mu_d}{k}, \quad (2.72)$$

$$\dot{x}(t) = -\left(x_0 - \frac{N\mu_d}{k}\right) \Omega \sin \Omega t. \quad (2.73)$$

Na obr. 2.6 je ukázán graf výchylky  $x(t)$  (vlevo) a rychlosti  $\dot{x}(t)$  (vpravo) během první půlperiody.

Na konci první půlperiody, tj. v čase  $t = \tau/2$ , kdy  $\cos \Omega t = \cos \pi = -1$  a  $\sin \Omega t = \sin \pi = 0$ , poloha a rychlost tak nabývají následujících hodnot:

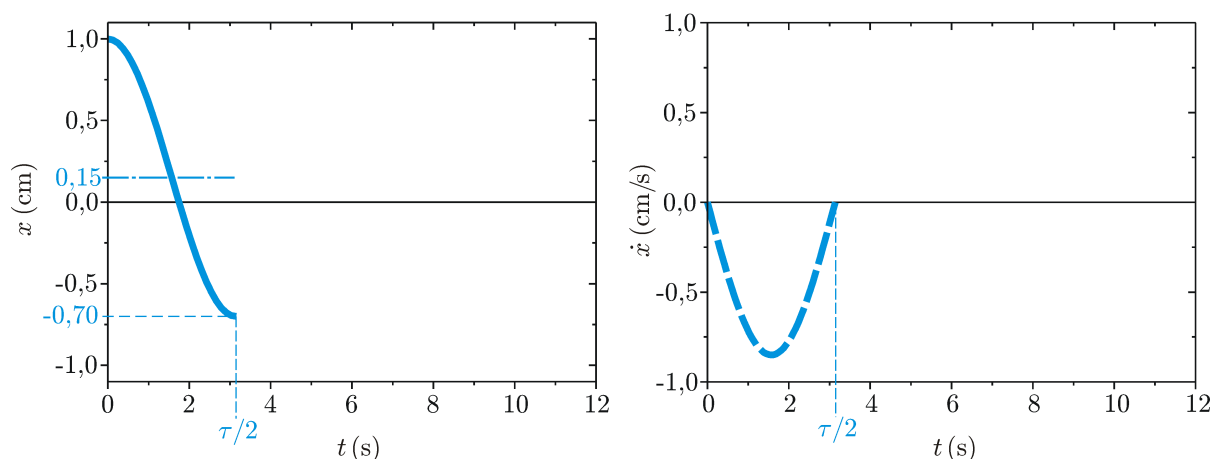
$$x(\tau/2) = -\left(x_0 - \frac{2N\mu_d}{k}\right), \quad (2.74)$$

$$\dot{x}(\tau/2) = 0. \quad (2.75)$$

V této chvíli se tedy těleso  $m$  zastaví, a to ve vzdálenosti  $x_0 - 2N\mu_d/k$  od rovnovážné polohy na opačné straně než na počátku. Tato vzdálenost je však v důsledku působení třecí síly o  $2N\mu_d/k$  menší.

<sup>9</sup>Viz např. D. Halliday, R. Resnick, J. Walker: *Fyzika*. 2. vydání, VUTIUM, Brno 2013, kap. 6, vztah (6.1).





Obrázek 2.6: Harmonický oscilátor tlumený konstantní třecí silou během první půlperrody. Vlevo: graf výchylky  $x(t)$  podle (2.72); vpravo: graf rychlosti  $\dot{x}(t)$  podle (2.73). Platí:  $\Omega = 1 \text{ s}^{-1}$ ,  $N\mu_d/k = 0,15 \text{ cm}$  a  $N\mu_s/k = 0,2 \text{ cm}$ . Počáteční podmínky jsou popsány vztahy (2.69), kde  $x_0 = 1 \text{ cm}$ .

Pro vyjádření dalšího pohybu musíme nejdříve opět testovat, zda vratná síla pružiny překoná statické tření, neboli zda platí podmínka

$$k \left| x_0 - \frac{2N\mu_d}{k} \right| > N\mu_s. \quad (2.76)$$

Porovnáním podmínek (2.70) a (2.76) vidíme, že nyní je vratná síla od pružiny menší o  $2N\mu_d$  a tudíž se může stát, že k překonání statické třecí síly tentokrát již nedojde. Těleso  $m$  by se v takovém případě nadále nepohybovalo.

Pokud je podmínka (2.76) splněna, začíná pohyb zpět směrem k rovnovážné poloze s kladným znaménkem rychlosti  $\dot{x}$ . Výchylka a rychlost se proto řídí funkcemi (2.66) a (2.68), avšak obecně s jinými integračními konstantami  $A$  a  $\phi$ , které nyní označíme  $A_2$  a  $\phi_2$ . Na začátku druhé půlperrody, tj. v čase  $t = \tau/2$ , potom platí:

$$\begin{aligned} x(\tau/2) &= A_2 \sin \left( \Omega \frac{\tau}{2} + \phi_2 \right) - \frac{N\mu_d}{k} = A_2 \sin (\pi + \phi_2) - \frac{N\mu_d}{k}, \\ \dot{x}(\tau/2) &= \Omega A_2 \cos \left( \Omega \frac{\tau}{2} + \phi_2 \right) = \Omega A_2 \cos (\pi + \phi_2). \end{aligned}$$

Nové integrační konstanty  $A_2$  a  $\phi_2$  se určí z nových „počátečních podmínek“ (2.74) a (2.75), které nastaly na konci první půlperrody (v témže čase  $t = \tau/2$ ):

$$x(\tau/2) = A_2 \sin (\pi + \phi_2) - \frac{N\mu_d}{k} = - \left( x_0 - \frac{2N\mu_d}{k} \right), \quad (2.77)$$

$$\dot{x}(\tau/2) = \Omega A_2 \cos (\pi + \phi_2) = 0. \quad (2.78)$$

Lze se přesvědčit o tom, že integrační konstanty  $A_2$  a  $\phi_2$  vyjdou

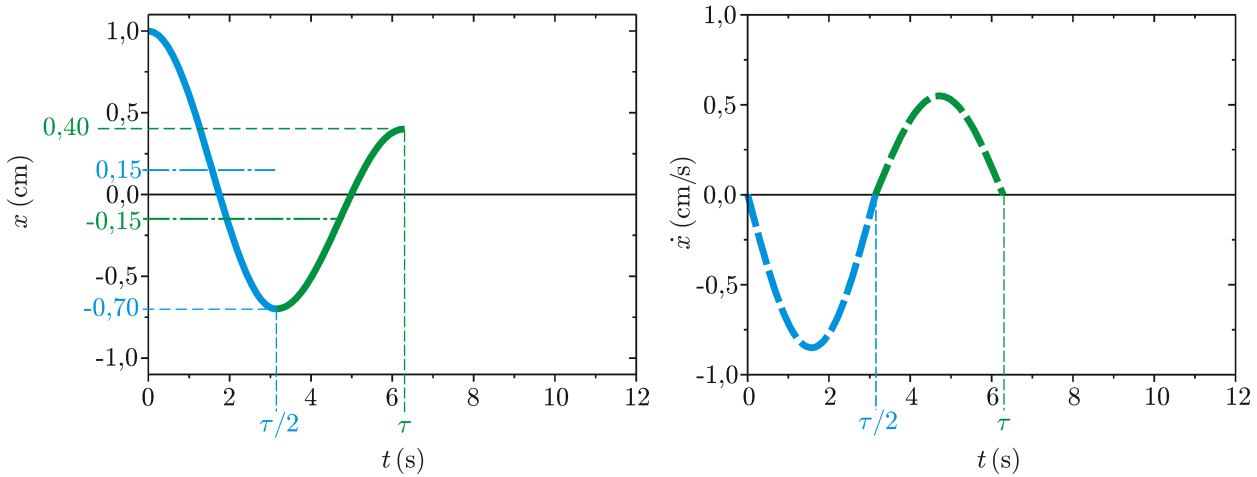
$$A_2 = x_0 - \frac{3N\mu_d}{k}, \quad \phi_2 = \frac{\pi}{2}. \quad (2.79)$$

Během druhé půlperiody, tj.  $t \in \langle \tau/2, \tau \rangle$ , jsou tak poloha a rychlost tělesa  $m$  popsány funkcemi

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{3N\mu_d}{k}\right) \sin(\Omega t + \pi/2) - \frac{N\mu_d}{k} = \left(x_0 - \frac{3N\mu_d}{k}\right) \cos \Omega t - \frac{N\mu_d}{k}, \quad (2.80)$$

$$\dot{x}(t) = -\left(x_0 - \frac{3N\mu_d}{k}\right) \Omega \sin \Omega t. \quad (2.81)$$

Na obr. 2.7 je ukázán graf výchylky  $x(t)$  (vlevo) a rychlosti  $\dot{x}(t)$  (vpravo) během prvních dvou půlperiod.



Obrázek 2.7: Harmonický oscilátor tlumený konstantní třecí silou během prvních dvou půlperiod. Vlevo: graf výchylky  $x(t)$  podle (2.72) a (2.80); vpravo: graf rychlosti  $\dot{x}(t)$  podle (2.73) a (2.81). Platí:  $\Omega = 1 \text{ s}^{-1}$ ,  $N\mu_d/k = 0,15 \text{ cm}$  a  $N\mu_s/k = 0,2 \text{ cm}$ . Počáteční podmínky jsou popsány vztahy (2.69), kde  $x_0 = 1 \text{ cm}$ .

Pohyb se zřejmě opět zastaví na konci druhé půlperiody v čase  $t = \tau$ , kdy

$$x(\tau) = \left(x_0 - \frac{3N\mu_d}{k}\right) \cos \Omega \tau - \frac{N\mu_d}{k} = x_0 - \frac{4N\mu_d}{k}, \quad (2.82)$$

$$\dot{x}(\tau) = -\left(x_0 - \frac{3N\mu_d}{k}\right) \Omega \sin \Omega \tau = 0, \quad (2.83)$$

což představuje nové „počáteční podmínky“ pro případný další pohyb. Nejdříve je však nutné otestovat podmínkou

$$k \left| x_0 - \frac{4N\mu_d}{k} \right| > N\mu_s, \quad (2.84)$$

zda síla od pružiny, která je opět menší ve srovnání s předchozími podmínkami (2.70) a (2.76), překoná statické tření či nikoli. Pokud ano, pohyb pokračuje ve třetí půlperiodě, tj.  $t \in \langle \tau, 3\tau/2 \rangle$ , se zápornou rychlostí  $\dot{x}$  podle funkcí (2.67) a (2.68) s novými integračními konstantami  $A_3$  a  $\phi_3$ . Nejnovější „počáteční podmínky“ (2.82) a (2.83)

$$\begin{aligned} x(\tau) &= A_3 \sin(\Omega \tau + \phi_3) + \frac{N\mu_d}{k} = x_0 - \frac{4N\mu_d}{k}, \\ \dot{x}(\tau) &= \Omega A_3 \cos(\Omega \tau + \phi_3) = 0 \end{aligned} \quad (2.85)$$

pak dávají nové integrační konstanty

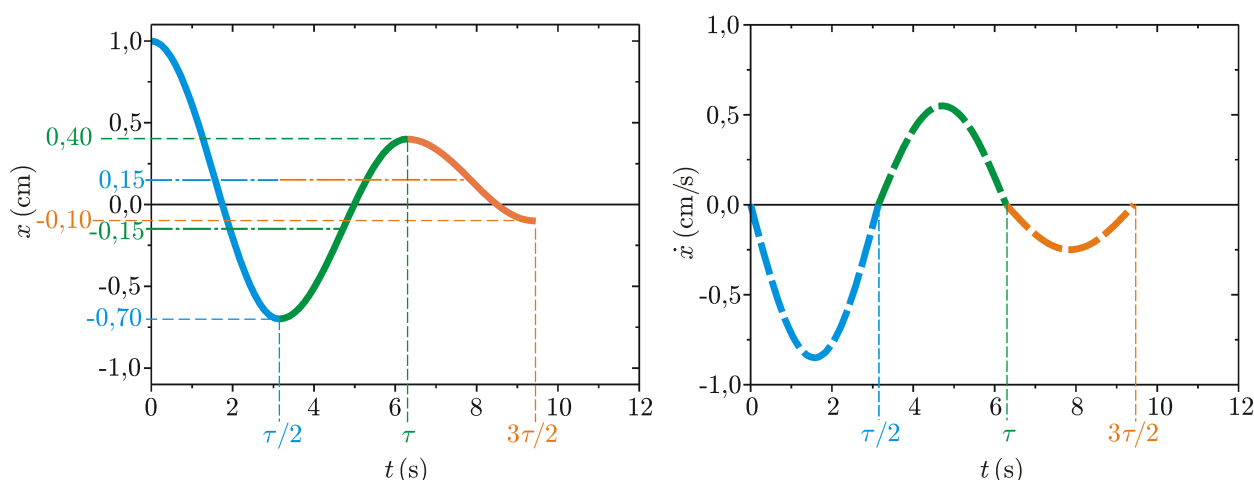
$$A_3 = x_0 - \frac{5N\mu_d}{k}, \quad \phi_3 = \frac{\pi}{2}. \quad (2.86)$$

Během třetí půlperiody jsou poloha a rychlost tělesa  $m$  tentokrát popsány funkcemi

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{4N\mu_d}{k}\right) \sin(\Omega t + \pi/2) + \frac{N\mu_d}{k} = \left(x_0 - \frac{4N\mu_d}{k}\right) \cos \Omega t + \frac{N\mu_d}{k}, \quad (2.87)$$

$$\dot{x}(t) = -\left(x_0 - \frac{4N\mu_d}{k}\right) \Omega \sin \Omega t. \quad (2.88)$$

Na obr. 2.8 je ukázán graf výchylky  $x(t)$  (vlevo) a rychlosti  $\dot{x}(t)$  (vpravo) během prvních tří půlperiod.



Obrázek 2.8: Harmonický oscilátor tlumený konstantní třecí silou během prvních tří půlperiod. Vlevo: graf výchylky  $x(t)$  podle (2.72), (2.80) a (2.87); vpravo: graf rychlosti  $\dot{x}(t)$  podle (2.73), (2.81) a (2.88). Platí:  $\Omega = 1 \text{ s}^{-1}$ ,  $N\mu_d/k = 0,15 \text{ cm}$  a  $N\mu_s/k = 0,2 \text{ cm}$ . Počáteční podmínky jsou popsány vztahy (2.69), kde  $x_0 = 1 \text{ cm}$ .

Nyní je již další postup zřejmý. Na konci každé další půlperiody, kdy je rychlost  $\dot{x}$  nulová, je nutné otestovat, zda síla od pružiny překoná statickou třecí sílu. Pokud ano, pohyb pokračuje, přičemž se příští amplituda sníží vždy o  $2N\mu_d/k$ . To znamená, že pro všechny integrační konstanty platí

$$A_1 = x_0 - \frac{N\mu_d}{k}, \quad A_2 = x_0 - \frac{3N\mu_d}{k}, \quad A_3 = x_0 - \frac{5N\mu_d}{k}, \quad \dots \quad (2.89)$$

a dále

$$\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = \dots = \pi/2.$$

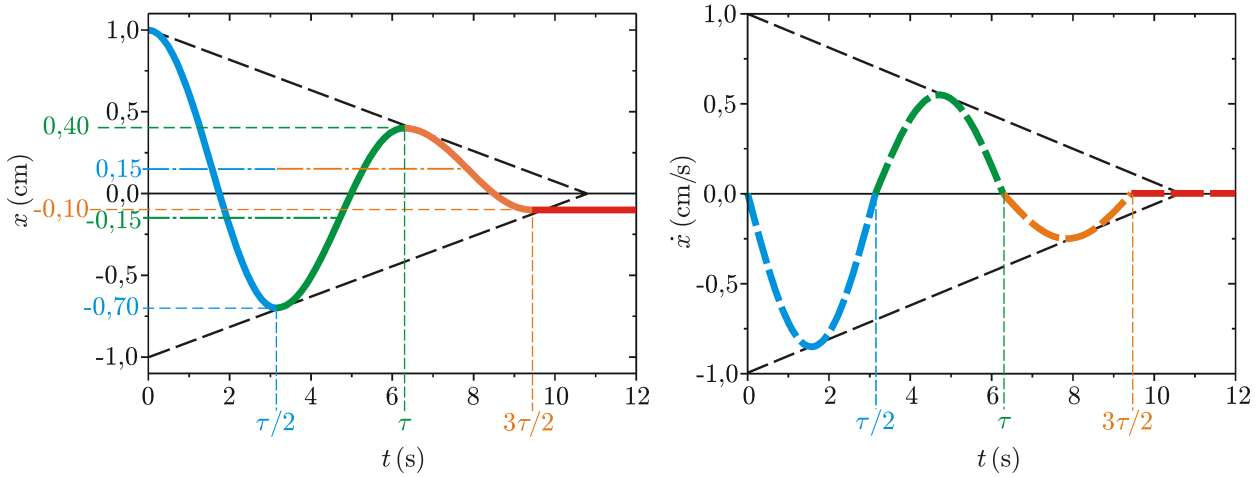
Graf výchylky  $x(t)$  (vlevo) a rychlosti  $\dot{x}(t)$  (vpravo) od počátku do zastavení oscilátoru je ukázán na obr. 2.9. Na konci třetí půlperiody ( $t = 3\tau/2$ ) již neplatí podmínka

$$k \left| x_0 - \frac{6N\mu_d}{k} \right| > N\mu_s$$

určující, zda vratná síla od pružiny překoná statickou třecí sílu. Od tohoto okamžiku tedy již těleso  $m$  setrvává ve stejné poloze a jeho rychlost je nulová. Vidíme tedy, že harmonický

oscilátor tlumený třecí silou již nedosáhne rovnovážné polohy  $x_e = 0$ , když  $t \rightarrow \infty$ , jako tomu bylo v případě tlumeného harmonického oscilátoru, viz (2.37) na str. 144.

Vztahy (2.89) naznačují, že amplitudy  $A_1, A_2, A_3, \dots$  v jednotlivých časových intervalech lineárně klesají. Abychom toto zdůraznili, v grafech na obr. 2.9 jsou zakresleny černé přerušované čáry.



Obrázek 2.9: Harmonický oscilátor tlumený konstantní třecí silou. Vlevo: graf výchylky  $x(t)$ ; vpravo: graf rychlosti  $\dot{x}(t)$ . Platí:  $\Omega = 1 \text{ s}^{-1}$ ,  $N\mu_d/k = 0,15 \text{ cm}$  a  $N\mu_s/k = 0,2 \text{ cm}$ . Počáteční podmínky jsou popsány vztahy (2.69), kde  $x_0 = 1 \text{ cm}$ . Na konci třetí půlperiody ( $t = 3\tau/2$ ), kdy je rychlost  $\dot{x}$  nulová, platí  $x_0 - 6N\mu_d/k < N\mu_s/k$ , což znamená, že vratná síla od pružiny již nepřekoná statickou třecí sílu. Od tohoto okamžiku tedy těleso  $m$  setrvává ve stejné poloze a jeho rychlost je nulová.

## Mechanická energie

Vzhledem k tomu, že na těleso  $m$  opět působí nekonzervativní síla (třecí), i v tomto případě očekáváme, že se bude mechanická energie  $E$  měnit. Nejprve obecně: vyjádříme časovou derivaci mechanické energie (2.16) tak, jak jsme to učinili v předchozích případech netlumeného a tlumeného harmonického oscilátoru:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 \right) = m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} = (m\ddot{x} + kx)\dot{x}.$$

Pohybová rovnice (2.63) však tentokrát říká, že závorka je rovna  $-\text{sgn}(\dot{x})N\mu_d$ . Vzhledem k tomu, že  $\text{sgn}(\dot{x})\dot{x} = |\dot{x}|$ , platí

$$\frac{dE}{dt} = -N\mu_d|\dot{x}| \leq 0. \quad (2.90)$$

Vidíme, že mechanická energie opět klesá, avšak tentokrát úměrně velikosti rychlosti  $|\dot{x}|$ . Pokud je rychlost nulová, pokles  $E$  se zastaví.

Ve shodě s předchozími výpočty její průběh postupně vyjádříme ve všech půlperiodách. V první půlperiodě, kdy  $t \in \langle 0, \tau/2 \rangle$ , můžeme pomocí vztahů (2.72) a (2.73) vyjádřit mechanickou energii takto:

$$E(t) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m \left( x_0 - \frac{N\mu_d}{k} \right)^2 \Omega^2 \sin^2 \Omega t + \frac{1}{2}k \left[ \left( x_0 - \frac{N\mu_d}{k} \right) \cos \Omega t + \frac{N\mu_d}{k} \right]^2.$$

Protože  $m\Omega^2 = k$ , můžeme mechanickou energii v první půlperiodě dále přepsat do tvaru

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2}k \left\{ \left( x_0 - \frac{N\mu_d}{k} \right)^2 \sin^2 \Omega t + \left[ \left( x_0 - \frac{N\mu_d}{k} \right) \cos \Omega t + \frac{N\mu_d}{k} \right]^2 \right\} = \\ &= \frac{1}{2}k \left[ \left( x_0 - \frac{N\mu_d}{k} \right)^2 + \left( \frac{N\mu_d}{k} \right)^2 + 2 \left( x_0 - \frac{N\mu_d}{k} \right) \frac{N\mu_d}{k} \cos \Omega t \right]. \end{aligned} \quad (2.91)$$

Tvar výchylek a rychlostí v dalších půlperiodách pak napovídá, jaký bude průběh mechanické energie dále. Ve druhé půlperiodě, kdy  $t \in \langle \tau/2, \tau \rangle$ , bude podle (2.80) a (2.81) následující:

$$E(t) = \frac{1}{2}k \left[ \left( x_0 - \frac{3N\mu_d}{k} \right)^2 + \left( \frac{N\mu_d}{k} \right)^2 - 2 \left( x_0 - \frac{3N\mu_d}{k} \right) \frac{N\mu_d}{k} \cos \Omega t \right], \quad (2.92)$$

ve třetí, kdy  $t \in \langle \tau, 3\tau/2 \rangle$ , bude podle (2.87) a (2.88) tento:

$$E(t) = \frac{1}{2}k \left[ \left( x_0 - \frac{5N\mu_d}{k} \right)^2 + \left( \frac{N\mu_d}{k} \right)^2 + 2 \left( x_0 - \frac{5N\mu_d}{k} \right) \frac{N\mu_d}{k} \cos \Omega t \right] \quad (2.93)$$

atd. Od okamžiku, kdy vratná síla od pružiny již nepřekoná statickou třecí sílu, bude kinetická energie rovna nule a mechanická energie tudíž bude rovna konstantní potenciální energii

$$E = \frac{1}{2}k \left[ x_0 - \frac{(2i+1)N\mu_d}{k} \right]^2, \quad (2.94)$$

kde  $i$  je index poslední amplitudy ve výčtu (2.89).

Na obr. 2.10 je ukázka grafu mechanické energie harmonického oscilátoru tlumeného třecí silou. Parametry jsou nastaveny stejně jako na obr. 2.9. Je vidět, že se pokles mechanické energie opět zastaví vždy, když je rychlost tělesa  $m$  nulová a dále k největšímu poklesu  $E$  dochází, když je velikost rychlosti maximální, jak jsme zmínili při rozebírání vztahu (2.90).

## 2.5 Buzený harmonický oscilátor

*Buzený harmonický oscilátor* je takové těleso o hmotnosti  $m$ , na které působí kromě vratné síly  $-kx$  od pružiny a popř. i tlumicí síly  $-B\dot{x}$  nějaká další vnější síla, jejíž průmět  $F^{\text{ext}}$  do osy  $x$  je obecně funkcí času, jež je známa. Této síle se někdy říká *budicí síla*. V pohybové rovnici (2.31) tlumeného harmonického oscilátoru tedy přidáme další člen reprezentující tuto budicí sílu:

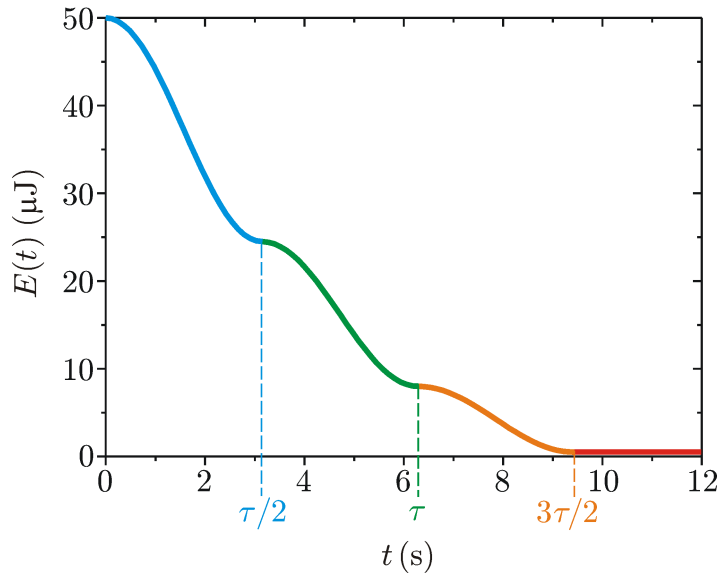
$$m\ddot{x} = -kx - B\dot{x} + F^{\text{ext}}(t) \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \frac{B}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F^{\text{ext}}(t)}{m}.$$

Užitím úhlové frekvence netlumených kmitů  $\Omega \equiv \sqrt{k/m}$ , viz (2.14), a tlumicí konstanty  $\gamma \equiv B/m$ , viz (2.32), tuto rovnici přepíšeme na tvar

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \Omega^2 x = \frac{F^{\text{ext}}(t)}{m}. \quad (2.95)$$

Toto je obyčejná diferenciální rovnice druhého řádu s nenulovou pravou stranou a představuje obecnou pohybovou rovnici buzeného harmonického oscilátoru.

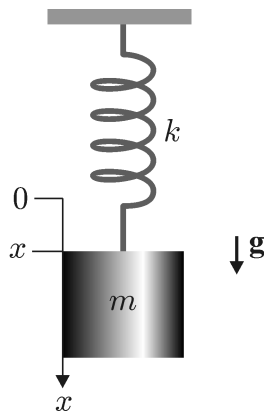
Způsoby jejího řešení záleží na samotné funkci  $F^{\text{ext}}(t)$ . Například položíme-li  $F^{\text{ext}}(t) = 0$ , dostáváme rovnici popisující pohyb tlumeného harmonického oscilátoru, jímž jsme se zabývali v odst. 2.3. V následujícím textu se proto budeme zabývat různými typy pohybové rovnice (2.95) a ukážeme postupy, jak ji vyřešit.



Obrázek 2.10: Časový vývoj mechanické energie  $E(t)$  harmonického oscilátoru tlumeného třecí silou v jednotlivých půlperiodách podle (2.91), (2.92) a (2.93) se stejnými parametry jako na obr. 2.9, tj.  $\Omega = 1 \text{ s}^{-1}$ ,  $N\mu_d/k = 0,15 \text{ cm}$  a  $N\mu_s/k = 0,2 \text{ cm}$ ; a dále  $k = 1 \text{ N/m}$ . Od konce třetí půlperiody ( $t = 3\tau/2$ ) je rychlost  $\dot{x}$  nulová v důsledku toho, že vratná síla od pružiny již nepřekoná statickou třecí sílu. Od tohoto okamžiku je tedy mechanická energie rovna (konstantní) potenciální energii podle (2.94), kde  $i = 3$ .

### 2.5.1 Buzení konstantní silou: harmonický oscilátor v tíhovém poli

Pohyb tělesa o hmotnosti  $m$  zavěšeného na vertikální pružině o tuhosti  $k$ , jejíž druhý konec je vetknut do stropu, je případem tlumeného harmonického oscilátoru buzeného konstantní tíhovou silou. Budeme-li orientovat osu  $x$  podél pružiny svisle dolů, pro  $x$ -ovou složku budící síly bude platit  $F^{\text{ext}} = mg$ , viz obr. 2.11. Počátek osy  $x$  opět umístíme do polohy tělesa  $m$ , kde je pružina nezdeformována.



Obrázek 2.11: Tlumený harmonický oscilátor v tíhovém poli. Na těleso  $m$  působí vratná síla od pružiny, tlumicí síla (není znázorněna) a konstantní budící síla reprezentovaná tíhovou silou  $mg$ .

Pohybovou rovnici (2.95) potom nalezneme ve tvaru

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \Omega^2 x = g \quad (2.96)$$

a nazýváme ji obyčejná diferenciální rovnice druhého řádu s konstantní pravou stranou. S tímto typem diferenciální rovnice jsme se již setkali (až na člen  $\gamma\dot{x}$ ) v předchozím odstavci, viz (2.63). Tehdy jsme její řešení „uhodli“, nyní ukážeme poněkud systematictější cestu k jejímu řešení. Nejprve ji přepíšeme takto:

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \Omega^2 x - g = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \gamma\dot{x} + \Omega^2 \left(x - \frac{mg}{k}\right) = 0. \quad (2.97)$$

Dále zavedeme substituci

$$\xi \equiv x - \frac{mg}{k}, \quad (2.98)$$

přičemž zřejmě platí

$$\dot{\xi} = \dot{x}, \quad \ddot{\xi} = \ddot{x}.$$

Nakonec vše dosadíme do (2.97):

$$\ddot{\xi} + \gamma\dot{\xi} + \Omega^2 \xi = 0. \quad (2.99)$$

Tento výsledek je velmi zajímavý. Obdrželi jsme totiž rovnici formálně stejnou jako pohybová rovnice tlumeného harmonického oscilátoru, viz (2.33) v odst. 2.3 na str. 143. Proto i řešení  $\xi(t)$  této rovnice ve všech režimech tlumení jsou detailně popsána v uvedeném odstavci. Řešení  $x(t)$  pohybové rovnice (2.96) pak pomocí (2.98) dostaneme ve tvaru

$$x(t) = \xi(t) + \frac{mg}{k}. \quad (2.100)$$

Rychlost  $\dot{x}$  je podle očekávání přímo rovna první derivaci  $\xi$  podle času:

$$\dot{x}(t) = \dot{\xi}(t). \quad (2.101)$$

Tyto výsledky si zaslouží komentář. Funkce  $x(t)$  a  $\xi(t)$  se liší pouze o konstantu  $mg/k$ . Znamená to tedy, že působení konstantní tíhové síly nemění míru tlumení ani frekvenci kmitání oscilátoru. Jediným důsledkem jejího působení je posun rovnovážné polohy, který si nyní vysvětlíme. V případě, že tíhová síla pohyb neovlivňuje, např. u „vodorovného“ netlumeného harmonického oscilátoru popsaného v odst. 2.2, rovnovážná poloha je taková poloha tělesa  $m$ , při níž je pružina nezdeformována, tj.  $x_e = 0$ , viz (2.7) na str. 138. Pokud se však harmonický oscilátor nachází v tíhovém poli, jeho rovnovážnou polohu získáme tak, že do (2.100) dosadíme za  $\xi = 0$  (rovnovážnou polohu „vodorovného“ oscilátoru):

$$x_e = \frac{mg}{k}. \quad (2.102)$$

Můžeme se přesvědčit o tom, že funkce  $x(t) = x_e = mg/k$  je řešením pohybové rovnice (2.96) s počátečními podmínkami  $x(0) = x_e$  a  $\dot{x}(0) = 0$ , a tudíž umístíme-li těleso  $m$  do polohy  $x_e$  s nulovou počáteční rychlostí, bude zde setrvávat nekonečně dlouho.

K výsledku (2.102) můžeme dojít i následující úvahou: Co je rovnovážná poloha? Je to taková poloha tělesa  $m$ , na něž působí nulová výslednice sil, pokud je zde umístěno s nulovou počáteční rychlostí. Vratná síla od pružiny tedy musí být stejně velká jako tíhová síla (tlumicí síla je spolu s rychlostí nulová), neboli

$$kx_e = mg,$$

z čehož již plyne (2.102).

Pro ukázkou vyšetříme, jak se v tíhovém poli pohybuje slabě tlumený harmonický oscilátor, tj. když  $\gamma/2 < \Omega$ . Pro tento případ jsme našli následující řešení rovnice (2.99), viz (2.48) na str. 146:

$$\xi(t) = A \exp(-\gamma t/2) \sin(\Omega' t + \phi).$$

Podle (2.101) tedy má výchylka slabě tlumeného harmonického oscilátoru v tíhovém poli tvar

$$x(t) = A \exp(-\gamma t/2) \sin(\Omega' t + \phi) + \frac{mg}{k}, \quad \text{kde } \Omega' = \sqrt{\Omega^2 - (\gamma/2)^2}. \quad (2.103)$$

Rychlost tělesa  $m$  je podle (2.101) přímo rovna funkci  $\dot{\xi}(t)$ :

$$\dot{x}(t) = \dot{\xi}(t) = \Omega' A \exp(-\gamma t/2) \left[ \cos(\Omega' t + \phi) - \frac{\gamma}{2\Omega'} \sin(\Omega' t + \phi) \right], \quad (2.104)$$

jak jsme již odvodili, viz (2.49) na str. 146. Zvolme nyní následující počáteční podmínky:

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad (2.105)$$

neboli v čase  $t = 0$  se těleso  $m$  nachází v poloze, kdy je pružina nezdeformována, a má nulovou počáteční rychlost. Potom

$$x(0) = A \sin \phi + \frac{mg}{k} = 0, \quad \dot{x}(0) = \Omega' A \left( \cos \phi - \frac{\gamma}{2\Omega'} \sin \phi \right) = 0.$$

Z druhé rovnice plyne

$$\cos \phi = \frac{\gamma}{2\Omega'} \sin \phi \quad \Rightarrow \quad \phi = \arctan \left( \frac{\Omega'}{\gamma/2} \right),$$

z první rovnice pak

$$A = -\frac{mg}{k \sin \phi} = -\frac{mg}{k \sin \left\{ \arctan \left[ \Omega' / (\gamma/2) \right] \right\}} = -\frac{mg \sqrt{\Omega'^2 + (\gamma/2)^2}}{k \Omega'},$$

neboť  $\sin[\arctan(a/b)] = a/\sqrt{a^2 + b^2}$ . Jak jsme zjistili při výpočtu mechanické energie slabě tlumeného harmonického oscilátoru,  $\Omega^2 = \Omega'^2 + (\gamma/2)^2$ , viz str. 148. Integrační konstantu  $A$  tedy můžeme napsat ve tvaru

$$A = -\frac{mg\Omega}{k\Omega'}.$$

Výchylka (2.103) a rychlost (2.104) slabě tlumeného harmonického oscilátoru v tíhovém poli s počátečními podmínkami (2.105) jsou nakonec popsány funkcemi

$$x(t) = \frac{mg}{k} \left\{ 1 - \frac{\Omega}{\Omega'} \exp(-\gamma t/2) \sin \left[ \Omega' t + \arctan \left( \frac{\Omega'}{\gamma/2} \right) \right] \right\} \quad (2.106)$$

a

$$\dot{x}(t) = \frac{mg\Omega}{k} \exp(-\gamma t/2) \left\{ \frac{\gamma}{2\Omega'} \sin \left[ \Omega' t + \arctan \left( \frac{\Omega'}{\gamma/2} \right) \right] - \cos \left[ \Omega' t + \arctan \left( \frac{\Omega'}{\gamma/2} \right) \right] \right\}. \quad (2.107)$$

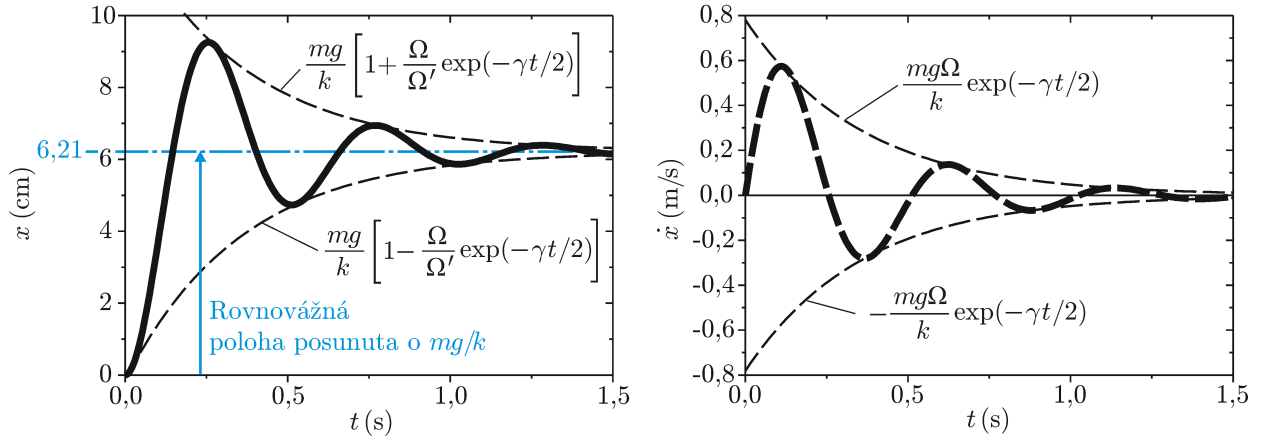
Funkce  $\exp(-\gamma t/2)$  způsobí, že

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \frac{mg}{k} = x_e, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{x}(t) = 0, \quad (2.108)$$

neboli v důsledku tlumicí síly se těleso postupně dostává do rovnovážné polohy a jeho rychlost se blíží nule. K tomuto závěru jsme došli již v případě „vodorovného“ tlumeného harmonického oscilátoru, viz (2.37) na str. 144, s tím rozdílem, že nyní podle (2.102) pro rovnovážnou polohu platí:  $x_e = mg/k$ .

Na obr. 2.12 jsou znázorněny ukázky grafů výchylky (2.106) a rychlosti (2.107). Je též ukázáno posunutí rovnovážné polohy o  $mg/k$ .





Obrázek 2.12: Slabě tlumený harmonický oscilátor v tíhovém poli s počátečními podmínkami (2.105). Vlevo: graf výchylky  $x(t)$  podle (2.106). Je naznačeno posunutí rovnovážné polohy o  $mg/k$ . Vpravo: graf rychlosti  $\dot{x}(t)$  podle (2.107). Platí:  $\Omega = 4\pi \text{ s}^{-1}$ ,  $\gamma/2 = 2\Omega/9$ , odkud  $mg/k = g/\Omega^2 \cong 6,21 \text{ cm}$  a  $\Omega' = 4\pi\sqrt{77}/9 \text{ s}^{-1} \cong 0,97\Omega$ .

### Mechanická energie

Konstantní budící síla (zde tíhová síla  $mg$ ) je silou konzervativní, a proto kromě pružné potenciální energie  $\frac{1}{2}kx^2$  ještě přibude potenciální energie tíhové síly. Zvolíme-li nulovou hladinu v  $x = 0$ , pak je vyjádřena ve tvaru  $-mgx$ . Potom mechanická energie sestává ze tří výrazů:

$$E(t) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 - mgx. \quad (2.109)$$

Změnu mechanické energie vyjádříme podobně jako v případě slabě tlumeného harmonického oscilátoru, viz str. 147:

$$\frac{dE}{dt} = m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} - mg\dot{x} = (\ddot{x} + \Omega^2x - g) m\dot{x}.$$

Závorka je však podle pohybové rovnice (2.96) rovna  $-\gamma\dot{x}$ , a proto

$$\frac{dE}{dt} = -m\gamma\dot{x}^2.$$

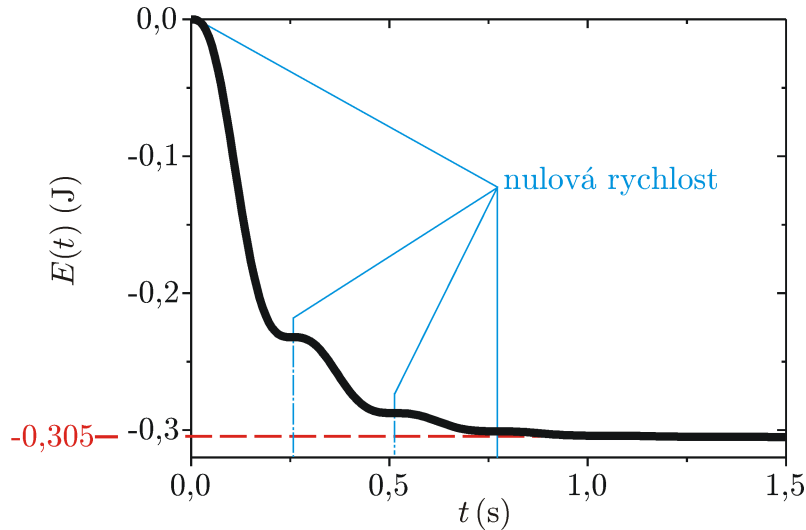
Vidíme, že pokles mechanické energie je opět úměrný kvadrátu rychlosti stejně jako v případě „vodorovného“ oscilátoru. Na počátku je mechanická energie rovna nule, neboť pružina je nezdeformována a nulová hladina potenciální energie tíhové síly je umístěna do bodu  $x = 0$ . Použijeme-li počáteční podmínky (2.105), ze vztahu (2.109) vskutku plyne, že

$$E(0) = 0.$$

Z výrazů (2.108) vyplývá, že se naopak po velmi dlouhé době ( $t \rightarrow \infty$ ) bude mechanická energie (2.109) blížit hodnotě

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E(t) = \frac{1}{2}kx_e^2 - mgx_e = -\frac{(mg)^2}{2k}.$$

Všechny uvedené vlastnosti mechanické energie lze vidět na obr. 2.13, kde je zachycena ukázka jejího grafu. Tlumený harmonický oscilátor v tíhovém poli má se stejné parametry jako na obr. 2.12.



Obrázek 2.13: Časový vývoj mechanické energie  $E(t)$  slabě tlumeného harmonického oscilátoru v tíhovém poli popsané vztahem (2.109). Parametry oscilátoru jsou stejné jako na obr. 2.12, tj.  $\Omega = 4\pi \text{ s}^{-1}$ ,  $\gamma/2 = 2\Omega/9$ , a dále  $m = 1 \text{ kg}$ . Platí tedy  $-(mg)^2/(2k) = -mg^2/(2\Omega^2) \cong -0,305 \text{ J}$  a  $\Omega' = 4\pi\sqrt{77}/9 \text{ s}^{-1} \cong 0,97 \Omega$ .

## 2.5.2 Buzení harmonicky kmitající silou

Má-li budící síla  $F^{\text{ext}}(t)$  harmonický průběh, znamená to, že její závislost na čase můžeme vyjádřit buď funkcí

$$F^{\text{ext}}(t) = F_0^{\text{ext}} \cos(\Omega_d t + \varphi_d), \quad (2.110)$$

anebo funkcí

$$F^{\text{ext}}(t) = F_0^{\text{ext}} \sin(\Omega_d t + \phi_d), \quad (2.111)$$

kde  $F_0^{\text{ext}}$  je amplituda a  $\Omega_d$  je úhlová frekvence budící síly a dále  $\varphi_d$  a  $\phi_d$  jsou počáteční fáze mající mezi sebou vztah  $\varphi_d = \phi_d - \pi/2$ . Z předchozího výkladu v odst. 2.2.1 víme, že veličiny s harmonickým průběhem můžeme též vyjádřit pomocí exponenciální funkce s komplexním argumentem:

$$F^{\text{ext}}(t) = F_+^{\text{ext}} \exp(i\Omega_d t), \quad (2.112)$$

kde

$$F_+^{\text{ext}} = |F_+^{\text{ext}}| \exp(i\varphi_d) = F_0^{\text{ext}} \exp(i\varphi_d) \quad (2.113)$$

je komplexní amplituda mající velikost  $|F_+^{\text{ext}}| = F_0^{\text{ext}}$  a fázi  $\varphi_d$ . Tohoto zápisu využijeme při řešení pohybové rovnice (2.95) buzeného harmonického oscilátoru, která v tomto případě nabývá tvaru:

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \Omega^2 x = \frac{F_+^{\text{ext}} \exp(i\Omega_d t)}{m}. \quad (2.114)$$

Protože derivace je lineární operací,<sup>10</sup> její řešení je rovno součtu *obecného řešení* rovnice se stejnou levou a s nulovou pravou stranou, tzv. *přidružené homogenní rovnice*, a *partikulárnímu*

<sup>10</sup>Znamená to, že  $n$ -tá derivace lineární kombinace funkcí  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_M(x)$  je rovna lineární kombinaci  $n$ -tých derivací těchto funkcí. Matematicky tuto vlastnost zapíšeme takto:

$$\frac{d^n}{dx^n} (a_1 f_1 + a_2 f_2 + \dots + a_M f_M) = a_1 \frac{d^n f_1}{dx^n} + a_2 \frac{d^n f_2}{dx^n} + \dots + a_M \frac{d^n f_M}{dx^n},$$

kde  $a_1, a_2, \dots, a_M$  jsou konstanty.

řešení rovnice (2.114). Obecné řešení přidružené homogenní rovnice k rovnici (2.114), tj.

$$\ddot{x}_h + \gamma \dot{x}_h + \Omega^2 x_h = 0, \quad (2.115)$$

jsme detailně probrali v odst. 2.3 na str. 143. V dalším textu se opět zaměříme na slabé tlumení, tj.  $\gamma/2 < \Omega$ , jak je ukázáno v části 2.3.2 na str. 146. Řešení přidružené homogenní rovnice (2.115) tedy opíšeme podle (2.48):

$$x_h(t) = A \exp(-\gamma t/2) \sin(\Omega' t + \phi), \quad (2.116)$$

kde  $\Omega' \equiv \sqrt{\Omega^2 - (\gamma/2)^2}$ . Partikulárním řešením nehomogenní rovnice (2.114) je funkce

$$x_p(t) = a_+ \exp(i\Omega_d t), \quad (2.117)$$

kde  $a_+$  je zatím neznámá komplexní konstanta. Tu určíme tak, že vyjádříme první a druhou derivaci této funkce:

$$\dot{x}_p(t) = i\Omega_d a_+ \exp(i\Omega_d t), \quad \ddot{x}_p(t) = -\Omega_d^2 a_+ \exp(i\Omega_d t)$$

a vše dosadíme zpět do (2.114). Potom dostáváme

$$-\Omega_d^2 a_+ \exp(i\Omega_d t) + i\gamma \Omega_d a_+ \exp(i\Omega_d t) + \Omega^2 a_+ \exp(i\Omega_d t) = \frac{F_+^{\text{ext}} \exp(i\Omega_d t)}{m},$$

odkud

$$a_+ \exp(i\Omega_d t) (-\Omega_d^2 + i\gamma \Omega_d + \Omega^2) = \frac{F_+^{\text{ext}} \exp(i\Omega_d t)}{m}.$$

Aby se levá i pravá strana sobě rovnaly v libovolném časovém okamžiku  $t$ , musí se sobě rovnat konstanty u exponenciálních funkcí, neboli

$$a_+ (-\Omega_d^2 + i\gamma \Omega_d + \Omega^2) = \frac{F_+^{\text{ext}}}{m}.$$

Úpravou a dosazením z (2.113) potom dostáváme výraz pro komplexní konstantu  $a_+$ :

$$a_+ = \frac{F_+^{\text{ext}}}{m} \frac{1}{\Omega^2 - \Omega_d^2 + i\gamma \Omega_d} = \frac{F_0^{\text{ext}} \exp(i\varphi_d)}{m} \frac{1}{\Omega^2 - \Omega_d^2 + i\gamma \Omega_d}.$$

Abychom zjistili reálnou a imaginární část druhého zlomku, je třeba se zbavit komplexního čísla v jeho jmenovateli. To uděláme rozšířením tohoto zlomku o komplexně sdružené číslo ke jmenovateli:

$$\begin{aligned} a_+ &= \frac{F_0^{\text{ext}} \exp(i\varphi_d)}{m} \frac{1}{\Omega^2 - \Omega_d^2 + i\gamma \Omega_d} \frac{\Omega^2 - \Omega_d^2 - i\gamma \Omega_d}{\Omega^2 - \Omega_d^2 - i\gamma \Omega_d} = \\ &= \frac{F_0^{\text{ext}} \exp(i\varphi_d)}{m} \frac{\Omega^2 - \Omega_d^2 - i\gamma \Omega_d}{(\Omega^2 - \Omega_d^2)^2 + (\gamma \Omega_d)^2}. \end{aligned} \quad (2.118)$$

Takto zapsané komplexní konstanty  $a_+$  nyní využijeme při vyjádření obecného řešení nehomogenní diferenciální rovnice (2.114). Jak jsme již uvedli, je rovno součtu obecného řešení (2.115) přidružené homogenní rovnice a partikulárního řešení (2.117) nehomogenní rovnice, tedy

$$\begin{aligned} x(t) &= x_h(t) + x_p(t) = A \exp(-\gamma t/2) \sin(\Omega' t + \phi) + a_+ \exp(i\Omega_d t) = \\ &= A \exp(-\gamma t/2) \sin(\Omega' t + \phi) + \frac{F_0^{\text{ext}}}{m} \frac{\Omega^2 - \Omega_d^2 - i\gamma \Omega_d}{(\Omega^2 - \Omega_d^2)^2 + (\gamma \Omega_d)^2} \exp[i(\Omega_d t + \varphi_d)]. \end{aligned}$$

Dosud jsme s výhodou využívali komplexního zápisu harmonicky kmitajících veličin. Jak jsme uvedli na konci odst. 2.2.1, nyní výchylce  $x(t)$  přiřadíme reálnou část jejího původního komplexního vyjádření. K němu dojdeme tak, že vynásobíme (komplexní) čítec druhého zlomku s exponenciální funkcí (mající komplexní argument):

$$\begin{aligned} x(t) &= A \exp(-\gamma t/2) \sin(\Omega' t + \phi) + \\ &+ \frac{F_0^{\text{ext}}}{m} \frac{(\Omega^2 - \Omega_d^2) \cos(\Omega_d t + \varphi_d) + \gamma \Omega_d \sin(\Omega_d t + \varphi_d)}{(\Omega^2 - \Omega_d^2)^2 + (\gamma \Omega_d)^2} + \\ &+ i \frac{F_0^{\text{ext}}}{m} \frac{(\Omega^2 - \Omega_d^2) \sin(\Omega_d t + \varphi_d) - \gamma \Omega_d \cos(\Omega_d t + \varphi_d)}{(\Omega^2 - \Omega_d^2)^2 + (\gamma \Omega_d)^2} \end{aligned}$$

a prostě namísto celého komplexního tvaru použijeme jen jeho reálnou část:

$$x(t) = A \exp(-\gamma t/2) \sin(\Omega' t + \phi) + \frac{F_0^{\text{ext}}}{m} \frac{(\Omega^2 - \Omega_d^2) \cos(\Omega_d t + \varphi_d) + \gamma \Omega_d \sin(\Omega_d t + \varphi_d)}{(\Omega^2 - \Omega_d^2)^2 + (\gamma \Omega_d)^2}. \quad (2.119)$$

Pokud si budeme chtít tento výraz ještě dále zjednodušit, zavedeme novou konstantu  $\theta$ , pro kterou platí:

$$\cotg \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \equiv \frac{\Omega^2 - \Omega_d^2}{\gamma \Omega_d}. \quad (2.120)$$

Pomocí ní totiž můžeme vyjádřit výrazy

$$\frac{\Omega^2 - \Omega_d^2}{\sqrt{(\Omega^2 - \Omega_d^2)^2 + (\gamma \Omega_d)^2}} = \cos \theta$$

a

$$\frac{\gamma \Omega_d}{\sqrt{(\Omega^2 - \Omega_d^2)^2 + (\gamma \Omega_d)^2}} = \sin \theta,$$

neboť vyjde  $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ . Takže (2.119) nabývá tvaru

$$x(t) = A \exp(-\gamma t/2) \sin(\Omega' t + \phi) + \frac{F_0^{\text{ext}}}{m} \frac{\cos(\theta) \cos(\Omega_d t + \varphi_d) + \sin(\theta) \sin(\Omega_d t + \varphi_d)}{\sqrt{(\Omega^2 - \Omega_d^2)^2 + (\gamma \Omega_d)^2}}. \quad (2.121)$$

Nakonec pomocí goniometrického vzorce  $\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \cos(\beta - \alpha)$  dostáváme

$$x(t) = A \exp(-\gamma t/2) \sin(\Omega' t + \phi) + \frac{F_0^{\text{ext}}}{m} \frac{\cos(\Omega_d t + \varphi_d - \theta)}{\sqrt{(\Omega^2 - \Omega_d^2)^2 + (\gamma \Omega_d)^2}}. \quad (2.122)$$

A užitím (2.49) na str. 146 potom derivace této funkce vychází ve tvaru

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \Omega' A \exp(-\gamma t/2) \left[ \cos(\Omega' t + \phi) - \frac{\gamma}{2\Omega'} \sin(\Omega' t + \phi) \right] - \\ &- \frac{F_0^{\text{ext}} \Omega_d}{m} \frac{\sin(\Omega_d t + \varphi_d - \theta)}{\sqrt{(\Omega^2 - \Omega_d^2)^2 + (\gamma \Omega_d)^2}}. \end{aligned} \quad (2.123)$$

Takto závisejí výchylka a rychlost tělesa  $m$  na čase. Vidíme, že se zde opět nacházejí dvě integrační konstanty  $A$  a  $\phi$ , které se určí z počátečních podmínek. Zvolme je ve tvaru

$$x(0) = \frac{F_0^{\text{ext}}}{m} \frac{\cos(\varphi_d - \theta)}{\sqrt{(\Omega^2 - \Omega_d^2)^2 + (\gamma \Omega_d)^2}}, \quad \dot{x}(0) = 0. \quad (2.124)$$

Potom

$$x(0) = A \sin \phi + \frac{F_0^{\text{ext}}}{m} \frac{\cos(\varphi_d - \theta)}{\sqrt{(\Omega^2 - \Omega_d^2)^2 + (\gamma\Omega_d)^2}} = \frac{F_0^{\text{ext}}}{m} \frac{\cos(\varphi_d - \theta)}{\sqrt{(\Omega^2 - \Omega_d^2)^2 + (\gamma\Omega_d)^2}},$$

$$\dot{x}(0) = \Omega' A \cos \phi - \frac{\gamma}{2} A \sin \phi - \frac{F_0^{\text{ext}} \Omega_d}{m} \frac{\sin(\varphi_d - \theta)}{\sqrt{(\Omega^2 - \Omega_d^2)^2 + (\gamma\Omega_d)^2}} = 0,$$

odkud

$$A \sin \phi = 0,$$

$$\Omega' A \cos \phi - \frac{\gamma}{2} A \sin \phi = \frac{F_0^{\text{ext}} \Omega_d}{m} \frac{\sin(\varphi_d - \theta)}{\sqrt{(\Omega^2 - \Omega_d^2)^2 + (\gamma\Omega_d)^2}}.$$

Z obou rovnic pak pořadě plyne, že

$$\phi = 0, \quad A = \frac{F_0^{\text{ext}} \Omega_d}{m \Omega'} \frac{\sin(\varphi_d - \theta)}{\sqrt{(\Omega^2 - \Omega_d^2)^2 + (\gamma\Omega_d)^2}}.$$

Poloha  $x(t)$  slabě tlumeného harmonického oscilátoru buzeného harmonicky kmitající silou (2.110) s počátečními podmínkami (2.124) tedy je podle (2.122) popsána funkcí:

$$x(t) = \frac{F_0^{\text{ext}} \Omega_d}{m \Omega'} \frac{\sin(\varphi_d - \theta)}{\sqrt{(\Omega^2 - \Omega_d^2)^2 + (\gamma\Omega_d)^2}} \exp(-\gamma t/2) \sin \Omega' t +$$

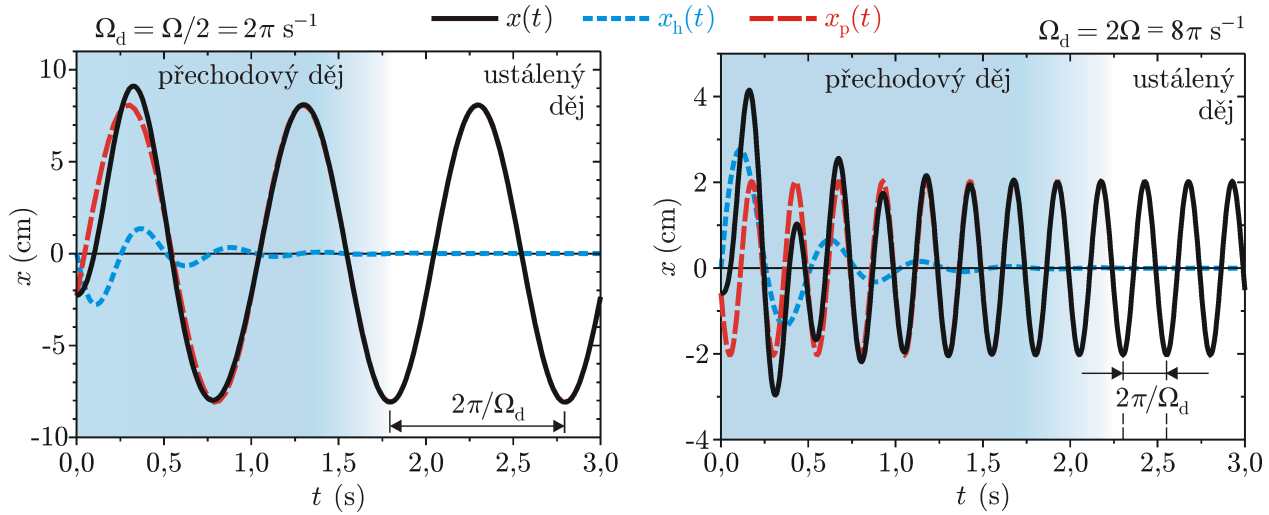
$$+ \frac{F_0^{\text{ext}}}{m \sqrt{(\Omega^2 - \Omega_d^2)^2 + (\gamma\Omega_d)^2}} \cos(\Omega_d t + \varphi_d - \theta). \quad (2.125)$$

První sčítanec zřejmě odpovídá řešení  $x_h(t)$  přidružené homogenní rovnice a kmity popsané touto funkcí se nazývají *vlastní kmity*, neboť jejich úhlová frekvence je rovna frekvenci  $\Omega'$  kmitů samotného tlumeného oscilátoru (bez budící síly). Druhý sčítanec představuje partikulární řešení  $x_p(t)$  nehomogenní diferenciální rovnice a pohybu podle této funkce říkáme *nucené (buzené) kmity*, protože probíhají s úhlovou frekvencí  $\Omega_d$  budící síly.

Ukázky grafů časové závislosti výchylky (2.125) (černá křivka) jsou zobrazeny na obr. 2.14. Všimáme si toho, že zatímco amplituda funkce  $x_h(t)$  (modrá přerušovaná křivka) se blíží nule, amplituda funkce  $x_p(t)$  (červená přerušovaná křivka) je podle (2.125) rovna konstantě

$$A_p \equiv \frac{F_0^{\text{ext}}}{m \sqrt{(\Omega^2 - \Omega_d^2)^2 + (\gamma\Omega_d)^2}}, \quad (2.126)$$

kteřá se nazývá *amplituda nucených kmitů*. To má za následek postupnou změnu charakteru kmitání z počátečního neperiodického na periodický. Neperiodickému pohybu buzeného oscilátoru říkáme *přechodový děj* (v grafech podbarven modře), následný periodický pohyb nazýváme *ustálený (stacionární) děj* (v grafech podbarven bíle). Ke změně mezi oběma ději zřejmě dochází tehdy, když má funkce  $x_h(t)$  již natolik malou amplitudu, že ji lze zanedbat vůči  $x_p(t)$ , zde zhruba od okamžiku  $t = 1,5$  s (graf vlevo) a  $t = 2$  s (graf vpravo).



Obrázek 2.14: Časový vývoj výchylky  $x(t)$  slabě tlumeného harmonického oscilátoru buzeného harmonicky kmitající silou podle (2.125), pro který platí  $\Omega = 4\pi \text{ s}^{-1}$ ,  $\gamma/2 = 2\Omega/9 \cong 0,22 \Omega$ ,  $F_0^{\text{ext}}/m = 10 \text{ m/s}^2$  a  $\varphi_d = -\pi/2$ . Dále jsou ukázána řešení  $x_h(t)$  přidružené homogenní rovnice (modrá přerušovaná křivka) a partikulární řešení  $x_p(t)$  nehomogenní rovnice (červená přerušovaná křivka). Vlevo: budící frekvence  $\Omega_d = \Omega/2$ , odkud podle (2.126)  $A_p \cong 8,09 \text{ cm}$  a podle (2.120)  $\theta \cong 0,29 \text{ rad}$ ; vpravo:  $\Omega_d = 2\Omega$ , odkud  $A_p \cong 2,02 \text{ cm}$  a  $\theta \cong 2,85 \text{ rad}$ .

### Ustálený děj

V mnoha případech je časový interval, po který probíhá přechodový děj, podstatně menší než celková doba sledování pohybu buzeného harmonického oscilátoru. Z předchozích úvah vyplývá, že přechodový děj trvá tak dlouho, dokud nabývá funkce  $x_h(t)$  (popisující vlastní kmity) významných hodnot vzhledem k funkci  $x_p(t)$  (vyjadřující nucené kmity). Při ustáleném ději v důsledku přítomnosti  $\exp(-\gamma t/2)$  již můžeme  $x_h(t)$  vůči  $x_p(t)$  zanedbat a z původního obecného řešení (2.122) nám tedy nyní zbývá jen

$$x(t) \cong x_p(t) = A_p \cos(\Omega_d t + \varphi_d - \theta), \quad (2.127)$$

kde podle (2.126)

$$A_p = \frac{F_0^{\text{ext}}}{m \sqrt{(\Omega^2 - \Omega_d^2)^2 + (\gamma \Omega_d)^2}}, \quad (2.128)$$

a podle (2.120)

$$\theta = \text{arccotg} \left( \frac{\Omega^2 - \Omega_d^2}{\gamma \Omega_d} \right). \quad (2.129)$$

Dále připomeňme, že externí (budící) síla se řídí funkcí (2.110):

$$F^{\text{ext}}(t) = F_0^{\text{ext}} \cos(\Omega_d t + \varphi_d). \quad (2.130)$$

Všimněme si, že funkce (2.127) již neobsahuje obvyklé dvě integrační konstanty, které běžně získáváme z počátečních podmínek. Znamená to, že pomocí počátečních podmínek nemůžeme nijak ovlivňovat amplitudu ani fázi nucených kmitů. Jsou již předem určeny vlastnostmi oscilátoru a parametry budící síly. Nyní se na obě tyto veličiny zaměříme.

V amplitudě nucených kmitů (2.128) vystupují veličiny charakterizující tlumený harmonický oscilátor ( $m$ ,  $\Omega$  a  $\gamma$ ), dále je úměrná amplitudě  $F_0^{\text{ext}}$  budící síly a je především funkcí

úhlové frekvence  $\Omega_d$  budicí síly. Nejprve se zaměříme na případ, kdy  $\Omega_d = 0$ , neboli podle (2.130) budicí (externí) síla je konstantní a její průmět do osy  $x$  je roven  $F_0^{\text{ext}} \cos \varphi_d$ . V takovém případě je i výchylka (2.127) při ustáleném ději konstantní a užitím (2.128) a (2.129) je dána vztahem

$$A_p = \frac{F_0^{\text{ext}}}{m\Omega^2}, \quad \theta = 0, \quad \Rightarrow \quad x(t) = \frac{F_0^{\text{ext}}}{m\Omega^2} \cos \varphi_d = \frac{F_0^{\text{ext}} \cos \varphi_d}{k}. \quad (2.131)$$

Tento výsledek nám připomíná případ „vertikálního“ harmonického oscilátoru v tíhovém poli, který byl uveden do rovnovážného stavu, viz odst. 2.5.1 na str. 158. Nahradíme-li totiž tíhovou sílu  $mg$  ve vztahu (2.108) na str. 160 konstantní vnější silou  $F_0^{\text{ext}} \cos \varphi_d$ , dostáváme stejnou (trvalou) výchylku z rovnovážné polohy, jež je popsána právě výrazem (2.131). Můžeme tedy říci, že buzení konstantní silou je ekvivalentní buzení harmonicky kmitající silou, jejíž frekvence se limitně blíží nule.

Dále si všímáme rozdílu v odmocnině ve jmenovateli (2.128), který naznačuje, že  $A_p$  nabývá maxima pro určitou hodnotu budicí frekvence  $\Omega_d = \Omega_r$ . Tu získáme položením derivace  $A_p$  podle  $\Omega_p$  rovnu nule:

$$\left. \frac{dA_p}{d\Omega_d} \right|_{\Omega_d=\Omega_r} = \frac{F_0^{\text{ext}}}{m} \frac{2\Omega_r(\Omega^2 - \Omega_r^2) - \gamma^2\Omega_r}{[(\Omega^2 - \Omega_r^2)^2 + (\gamma\Omega_r)^2]^{3/2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\Omega_r(\Omega^2 - \Omega_r^2) = \gamma^2\Omega_r.$$

Uvažujeme-li pouze o kladných hodnotách  $\Omega_r$ , dostáváme

$$\Omega_r = \sqrt{\Omega^2 - \gamma^2/2}. \quad (2.132)$$

Toto je úhlová frekvence budicí síly, při které amplituda nucených kmitů nabývá svého maxima a říkáme jí *rezonanční frekvence*.

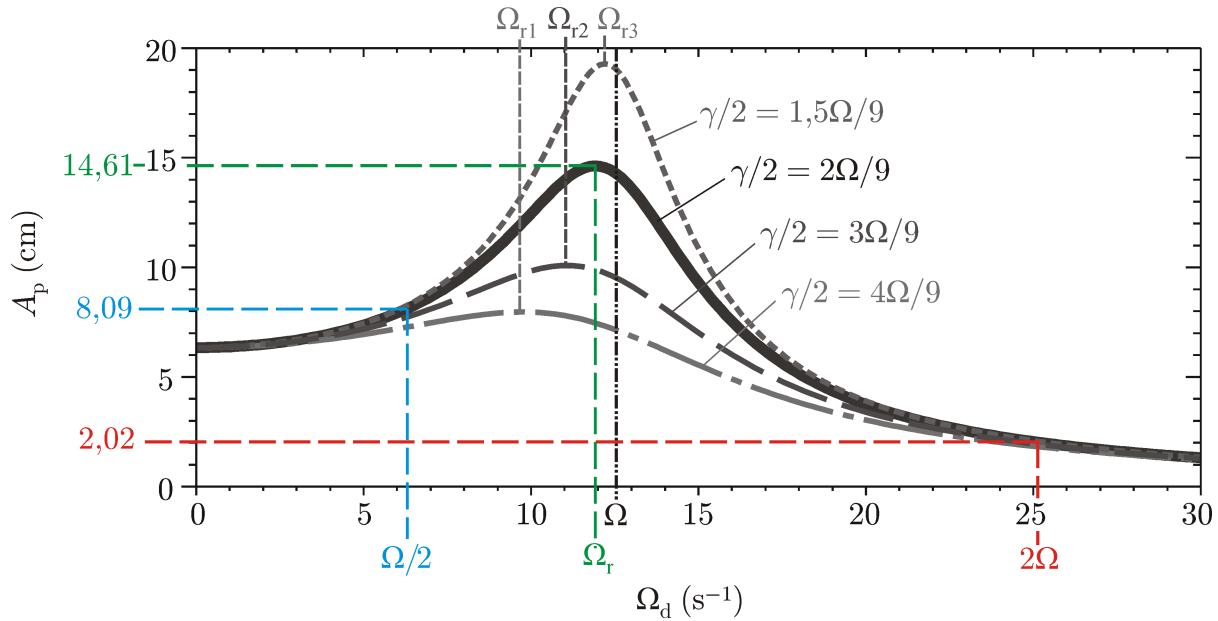
Na obr. 2.15 jsou ukázány grafy závislosti  $A_p(\Omega_d)$  pro různé hodnoty  $\gamma/2$ . Je zřejmé, že při snižování tlumení ( $\gamma/2$  klesá) amplituda  $A_p$  dosahuje stále vyšších hodnot, přičemž nejrychleji roste v oblasti okolo rezonanční frekvence  $\Omega_r$ . Ta se zároveň podle (2.132) blíží vlastní úhlové frekvenci  $\Omega$ . Dále vidíme to, co známe při pozorování oscilátorů buzených silou s proměnlivou frekvencí, např. rozbíhající se ždímačka s nerovnoměrně rozloženým prádlem: Zpočátku při nízkých hodnotách úhlové frekvence  $\Omega_d$  budicí síly amplituda  $A_p$  nucených kmitů postupně roste. To je způsobeno tím, že hmota oscilátoru lépe a lépe „následuje“ kmitající budicí sílu. V okamžiku, kdy se úhlová frekvence  $\Omega_d$  budicí síly rovná rezonanční frekvenci  $\Omega_r$  oscilátoru, dosahuje oscilátor maximální amplitudy a říkáme, že je budicí síla s oscilátorem *v rezonanci*. Při vyšších frekvencích již hmota oscilátoru „nestačí následovat“ budicí sílu a amplituda nucených kmitů postupně klesá. Při velmi vysokých hodnotách budicí frekvence ( $\Omega_p \rightarrow \infty$ ) se již budicí síla mění tak rychle, že hmota oscilátoru setrvává stále blíže rovnovážné poloze, tj.  $A_p \rightarrow 0$  a tedy i  $x(t) \rightarrow 0$ .

Fáze nucených kmitů (2.127) je rovna číslu stojícímu za  $\Omega_d t$  v argumentu funkce kosinus:

$$\varphi_d - \theta.$$

Je-li  $\varphi_d$  podle (2.130) počáteční fáze budicí síly, tento výraz můžeme interpretovat tak, že nucené kmity oscilátoru jsou fázově zpožděny o  $\theta$  oproti kmitům budicí síly. Užitím (2.129) tedy můžeme fázové zpoždění  $-\theta$  vyjádřit výrazem

$$-\theta = -\text{arccotg} \left( \frac{\Omega^2 - \Omega_d^2}{\gamma\Omega_d} \right). \quad (2.133)$$



Obrázek 2.15: Grafy závislosti amplitudy  $A_p$  nucených kmitů na úhlové frekvenci  $\Omega_d$  budící síly pro různé hodnoty  $\gamma/2$  podle (2.128). Zbývající parametry jsou nastaveny stejně jako na obr. 2.14, tj.  $\Omega = 4\pi \text{ s}^{-1} \cong 12,57 \text{ s}^{-1}$ ,  $F_0^{\text{ext}}/m = 10 \text{ m/s}^2$ . Plná křivka odpovídá i stejné hodnotě  $\gamma/2 = 2\Omega/9 \cong 0,22\Omega$  a jsou pro tento případ ukázány i amplitudy nucených kmitů pro  $\Omega_d = \Omega/2$  (modře) a  $\Omega_d = 2\Omega$  (červeně), které lze porovnat s obr. 2.14 v oblastech ustáleného děje. Amplituda nucených kmitů při rezonanční frekvenci  $\Omega_r \cong 11,93 \text{ s}^{-1}$ , viz (2.132), nabývá maximální hodnoty (zeleně). Při ostatních hodnotách  $\gamma/2$  vycházejí rezonanční frekvence takto:  $\Omega_{r1} \cong 9,77 \text{ s}^{-1}$ ,  $\Omega_{r2} \cong 11,08 \text{ s}^{-1}$ ,  $\Omega_{r3} \cong 12,21 \text{ s}^{-1}$ .

Vidíme, že s rostoucí budící frekvencí jsou nucené kmity stále více zpožděny oproti budící síle. Je-li úhlová frekvence  $\Omega_d$  budící síly právě rovna vlastní úhlové frekvenci oscilátoru  $\Omega$ , v čitateli argumentu funkce  $\text{arccotg}$  vychází nula a tudíž fázové zpoždění je v tomto případě rovno  $-\pi/2$ . Nejvíce jsou nucené kmity zpožděny o  $\pi$  a to tehdy, když  $\Omega_d \rightarrow \infty$ .

Příklady grafů závislosti fázového zpoždění  $-\theta$  na budící frekvenci  $\Omega_d$  jsou ukázány na obr. 2.16.

## Mechanická energie

Vztah pro mechanickou energii tlumeného harmonického oscilátoru buzeného harmonicky kmitající silou zůstává stejný jako v případě netlumeného harmonického oscilátoru, viz (2.16) na str. 139:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2. \quad (2.134)$$

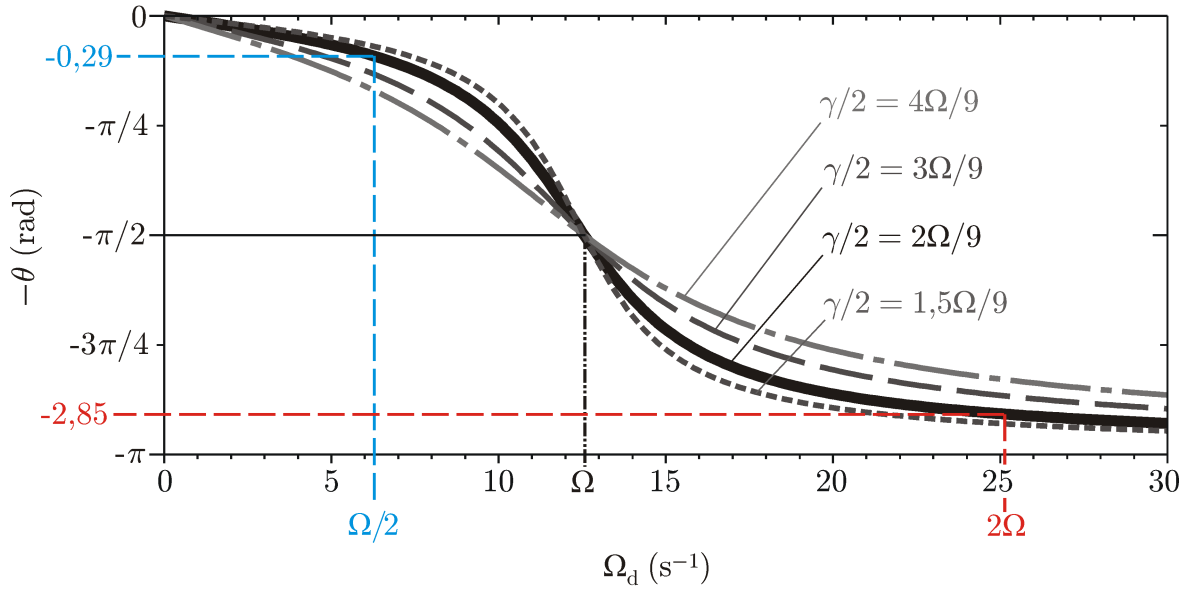
Její časovou změnu vyjadřuje derivace

$$\frac{dE}{dt} = m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} = (\ddot{x} + \Omega^2x)m\dot{x}.$$

Závorku můžeme podle pohybové rovnice (2.114) vyjádřit ve tvaru

$$\ddot{x} + \Omega^2x = \frac{F_0^{\text{ext}} \cos(\Omega_d t + \varphi_d)}{m} - \gamma\dot{x},$$





Obrázek 2.16: Grafy závislosti fázového zpoždění  $-\theta$  nucených kmitů na úhlové frekvenci  $\Omega_d$  budící síly pro různé hodnoty  $\gamma/2$ . Zbývající parametry jsou nastaveny stejně jako na obr. 2.15, tj.  $\Omega = 4\pi \text{ s}^{-1} \cong 12,57 \text{ s}^{-1}$ ,  $F_0^{\text{ext}}/m = 10 \text{ m/s}^2$ . Plná křivka odpovídá i stejné hodnotě  $\gamma/2 = 2\Omega/9 \cong 0,22\Omega$  a jsou pro tento případ ukázána fázová zpoždění nucených kmitů pro  $\Omega_d = \Omega/2$  (modře) a  $\Omega_d = 2\Omega$  (červeně).

kde jsme komplexní vyjádření budící síly  $F_+^{\text{ext}} \exp(i\Omega_d t)$  nahradili výrazem (2.130). Odtud

$$\frac{dE}{dt} = F_0^{\text{ext}} \cos(\Omega_d t + \varphi_d) \dot{x} - B\dot{x}^2, \quad (2.135)$$

kde  $B = m\gamma$  je konstanta charakterizující míru tlumení viz (2.30) na str. 143. Vidíme, že kromě poklesu  $-B\dot{x}^2$  mechanické energie způsobeného tlumicí silou úměrnou kvadrátu rychlosti se ještě na změně  $E$  podílí budící síla prostřednictvím členu  $F_0^{\text{ext}} \cos(\Omega_d t + \varphi_d) \dot{x}$ . Ze základního kurzu fyziky víme, že *výkon* síly je roven skalárnímu součinu síly a rychlosti.<sup>11</sup> Na rozdíl od výkonu tlumicí síly, který je vždy záporný a tudíž vždy způsobuje pokles mechanické energie, výkon budící síly je někdy záporný, jindy kladný.

Pro větší názornost ukážeme časový průběh mechanické energie bez souvislostí s budící a tlumicí silou a navíc jen při ustáleném ději. Podle (2.127) je výchylka nucených kmitů popsána funkcí

$$x(t) = A_p \cos(\Omega_d t + \varphi_d - \theta), \quad (2.136)$$

kde amplituda  $A_p$  a fázové zpoždění  $-\theta$  nucených kmitů jsou dány vztahy (2.128) a (2.133). Rychlost je potom zřejmě

$$\dot{x}(t) = -A_p \Omega_d \sin(\Omega_d t + \varphi_d - \theta). \quad (2.137)$$

Závislost mechanické energie (2.134) na čase tedy nalézáme ve tvaru

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2} m A_p^2 \Omega_d^2 \sin^2(\Omega_d t + \varphi_d - \theta) + \frac{1}{2} k A_p^2 \cos^2(\Omega_d t + \varphi_d - \theta) = \\ &= \frac{1}{2} m A_p^2 [\Omega_d^2 \sin^2(\Omega_d t + \varphi_d - \theta) + \Omega^2 \cos^2(\Omega_d t + \varphi_d - \theta)]. \end{aligned}$$

<sup>11</sup>Viz např. D. Halliday, R. Resnick, J. Walker: *Fyzika*. 2. vydání, VUTIUM, Brno 2013, kap. 7, vztah (7.48).

Tento výraz ještě můžeme dále vyjádřit poněkud symetričtěji:

$$E(t) = \frac{1}{2}mA_p^2 \left\{ \frac{\Omega^2 + \Omega_d^2}{2} [\sin^2(\Omega_d t + \varphi_d - \theta) + \cos^2(\Omega_d t + \varphi_d - \theta)] - \frac{\Omega^2 - \Omega_d^2}{2} [\sin^2(\Omega_d t + \varphi_d - \theta) - \cos^2(\Omega_d t + \varphi_d - \theta)] \right\}.$$

Vzhledem k tomu, že  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  a  $\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = -\cos 2\alpha$ , mechanická energie vychází

$$E(t) = \frac{1}{4}mA_p^2 (\Omega^2 + \Omega_d^2) + \frac{1}{4}mA_p^2 (\Omega^2 - \Omega_d^2) \cos(2\Omega_d t + 2\varphi_d - 2\theta). \quad (2.138)$$

Tento výsledek říká, že mechanická energie kmitá s frekvencí  $2\Omega_d$  okolo konstanty určené prvním členem. Tuto konstantu nazveme *střední hodnotou* mechanické energie a označíme ji  $\langle E \rangle$ . Platí tedy

$$\langle E \rangle = \frac{1}{4}mA_p^2 (\Omega^2 + \Omega_d^2).$$

Dosažením za  $A_p$  ze vztahu (2.128) dále můžeme psát

$$\langle E \rangle = \frac{(F_0^{\text{ext}})^2}{4m} \frac{\Omega^2 + \Omega_d^2}{(\Omega^2 - \Omega_d^2)^2 + (\gamma\Omega_d)^2}. \quad (2.139)$$

Vyjádření veličin oscilujících okolo nějaké (obecně měnící se) úrovně pomocí její střední hodnoty bývá výhodné v případech, kdy jsou oscilace nepodstatné nebo dokonce zanedbatelné. Tehdy nám střední hodnota dává dobrou představu o tom, jakých typických hodnot daná veličina dosahuje v určitém časovém intervalu.

Na obr. 2.17 je ukázána závislost střední hodnoty mechanické energie  $\langle E \rangle$  na úhlové frekvenci  $\Omega_d$  budící síly. Podle očekávání vidíme, že výkon budící síly udržuje nejvyšší hodnoty  $\langle E \rangle$  při buzení frekvencemi blízko vlastní frekvence  $\Omega$  a rezonanční frekvence  $\Omega_r$  oscilátoru určené vztahem (2.132).

Zaměříme-li se na speciální případ, kdy  $\Omega_d = \Omega$ , tj. frekvence budící síly je právě rovna vlastní frekvenci oscilátoru, mechanická energie (2.138) vychází takto:

$$E = \langle E \rangle = \frac{(F_0^{\text{ext}})^2}{2m\gamma^2}. \quad (2.140)$$

Je tedy v tomto případě konstantní a její časová derivace je tudíž rovna nule. Podle (2.135) potom musí platit

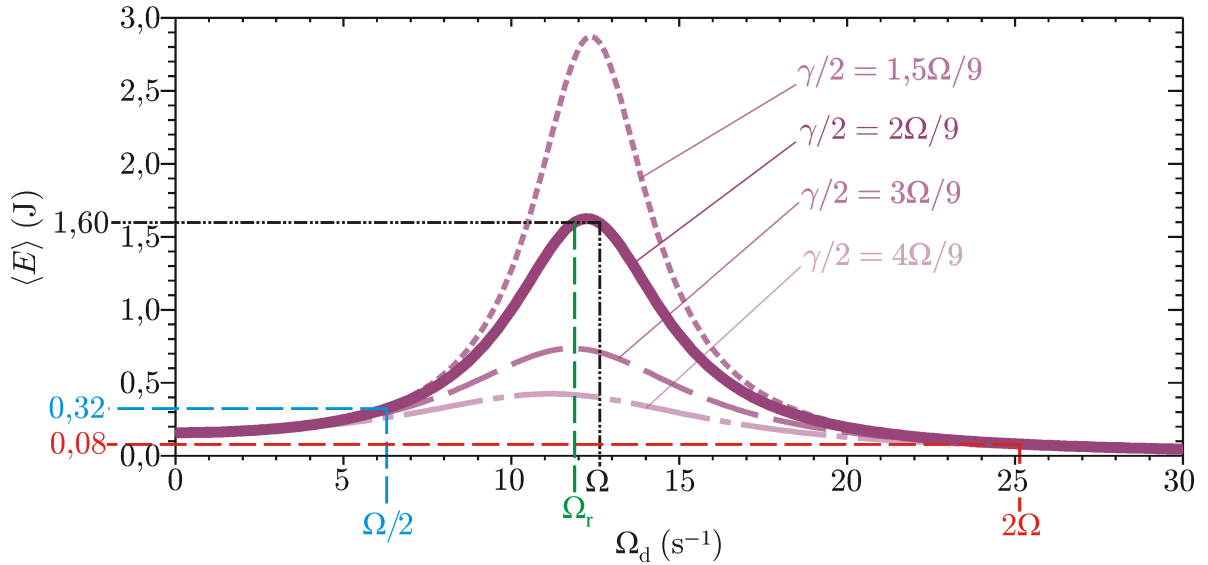
$$F_0^{\text{ext}} \cos(\Omega t + \varphi_d) \dot{x} = B\dot{x}^2 \quad \Rightarrow \quad F_0^{\text{ext}} \cos(\Omega t + \varphi_d) = B\dot{x}.$$

Znamená to, že výkon budící síly v každém okamžiku přesně kompenzuje energiovou ztrátu v důsledku působení tlumivé síly. Toho lze dosáhnout jedině tehdy, když budící síla má stejnou fázi jako rychlost oscilátoru. Po dosažení za  $\dot{x}$  z (2.137) dále dostáváme

$$F_0^{\text{ext}} \cos(\Omega t + \varphi_d) = -BA_p\Omega \sin(\Omega t + \varphi_d - \theta).$$

Podle (2.133) v tomto případě dále platí, že  $-\theta = -\pi/2$ , takže

$$F_0^{\text{ext}} \cos(\Omega t + \varphi_d) = -BA_p\Omega \sin(\Omega t + \varphi_d - \pi/2) = BA_p\Omega \cos(\Omega t + \varphi_d).$$



Obrázek 2.17: Grafy závislosti střední hodnoty mechanické energie  $\langle E \rangle$  buzeného oscilátoru na úhlové frekvenci  $\Omega_d$  budící síly pro různé hodnoty  $\gamma/2$ . Zbývající parametry jsou nastaveny stejně jako na obr. 2.15, tj.  $\Omega = 4\pi \text{ s}^{-1} \cong 12,57 \text{ s}^{-1}$ ,  $m = 1 \text{ kg}$ ,  $F_0^{\text{ext}} = 10 \text{ N}$ . Plná křivka odpovídá i stejné hodnotě  $\gamma/2 = 2\Omega/9 \cong 0,22 \Omega$  a jsou pro tento případ ukázány hodnoty  $\langle E \rangle$  pro  $\Omega_d = \Omega/2$  (modře) a  $\Omega_d = 2\Omega$  (červeně).

Když  $\Omega_d = \Omega$ , pro amplitudu  $A_p$  nucených kmitů potom platí

$$A_p = \frac{F_0^{\text{ext}}}{B\Omega} = \frac{F_0^{\text{ext}}}{m\gamma\Omega},$$

což ostatně již předpovídá vztah (2.128).

Na obr. 2.18 vidíme časové vývoje nucených kmitů  $x(t)$ , budící síly  $F^{\text{ext}}(t)$  a mechanické energie  $E(t)$  pro různé hodnoty budící frekvence  $\Omega_d$ . Všimáme si rostoucího fázového zpoždění  $x(t)$  za  $F^{\text{ext}}(t)$  se zvětšující se  $\Omega_d$ . Při nízké budící frekvenci je výchylka nepatrně zpožděna za budící silou, viz graf nahoře vlevo. Prostřední dvojice grafů ukazuje případ, kdy  $\Omega_d = \Omega$ . Nucené kmity  $x(t)$  jsou zpožděny za  $F^{\text{ext}}(t)$  přesně o  $\pi/2$  a mechanická energie  $E$  je konstantní, jak říká vztah (2.140). Při vysoké budící frekvenci jsou již kmity zpožděny téměř o  $\pi$ , viz graf dole vlevo. Všechna tři uvedená fázová zpoždění lze vidět na obr. 2.16.

### 2.5.3 Buzení silou složenou ze dvou harmonických příspěvků

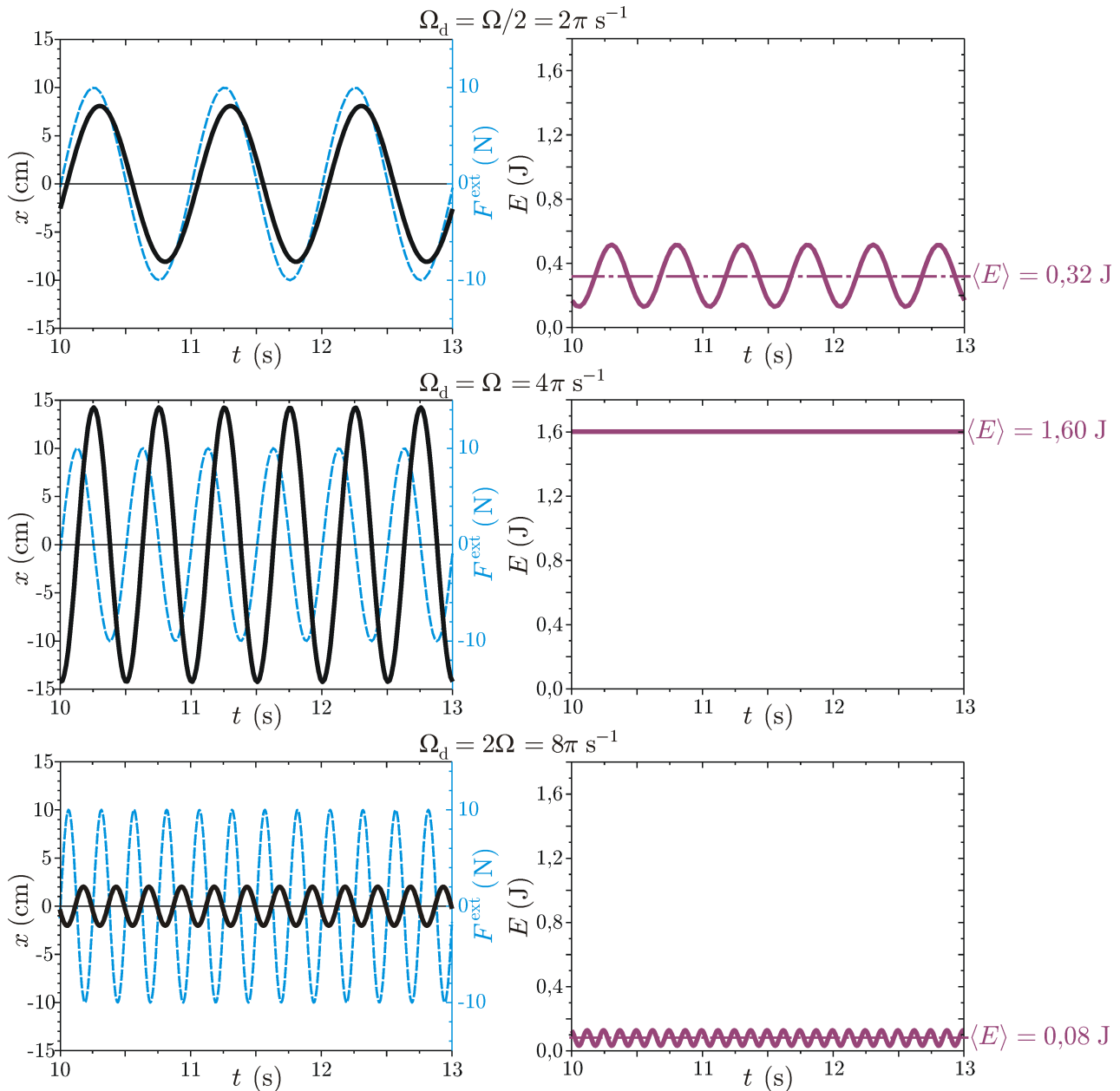
Předpokládáme, že průmět budící síly do osy  $x$  je určen součtem dvou harmonických příspěvků o různých úhlových frekvencích  $\Omega_{d,1}$  a  $\Omega_{d,2}$ :

$$F^{\text{ext}}(t) = F_1^{\text{ext}} \cos(\Omega_{d,1}t + \varphi_{d,1}) + F_2^{\text{ext}} \cos(\Omega_{d,2}t + \varphi_{d,2}), \quad (2.141)$$

kde  $F_1^{\text{ext}}$  a  $F_2^{\text{ext}}$  jsou (reálné) amplitudy a  $\varphi_{d,1}$  a  $\varphi_{d,2}$  počáteční fáze každého z obou příspěvků. Máme tedy řešit pohybovou rovnici (2.95) na str. 157 ve tvaru

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \Omega^2x = F_1^{\text{ext}} \cos(\Omega_{d,1}t + \varphi_{d,1}) + F_2^{\text{ext}} \cos(\Omega_{d,2}t + \varphi_{d,2}). \quad (2.142)$$

Pokud by byl tlumený harmonický oscilátor buzen pouze jedním nebo druhým z obou příspěvků, potom bychom bychom měli touž pohybovou rovnici pro každý případ zvlášť ve



Obrázek 2.18: Sloupec vlevo: Grafy časového vývoje nucených kmitů  $x(t)$  podle (2.136) (plná černá křivka) a průmětu  $F^{\text{ext}}(t)$  budící síly do osy  $x$  podle (2.130) (přerušovaná modrá křivka). Sloupec vpravo: Grafy závislosti mechanické energie  $E$  na čase podle (2.138) (plná fialová křivka) s naznačenými středními hodnotami  $\langle E \rangle$  podle (2.139). Parametry jsou nastaveny stejně jako na předchozích obrázcích:  $\Omega = 4\pi \text{ s}^{-1}$ ,  $\gamma/2 = 2\Omega/9$ ,  $m = 1 \text{ kg}$ ,  $F_0^{\text{ext}} = 10 \text{ N}$ ,  $\varphi_d = -\pi/2$ . Frekvence budící síly má hodnoty  $\Omega_d = \Omega/2$  (horní dvojice grafů),  $\Omega_d = \Omega$  (prostřední dvojice grafů) a  $\Omega_d = 2\Omega$  (dolní dvojice grafů).

tvarech

$$\ddot{x}_1 + \gamma\dot{x}_1 + \Omega^2 x_1 = F_1^{\text{ext}} \cos(\Omega_{d,1}t + \varphi_{d,1}), \quad (2.143)$$

$$\ddot{x}_2 + \gamma\dot{x}_2 + \Omega^2 x_2 = F_2^{\text{ext}} \cos(\Omega_{d,2}t + \varphi_{d,2}). \quad (2.144)$$

Jejich řešeními jsou podle (2.122) na str. 164 funkce

$$x_1(t) = A_1 \exp(-\gamma t/2) \sin(\Omega' t + \phi_1) + \frac{F_1^{\text{ext}}}{m} \frac{\cos(\Omega_{d,1} t + \varphi_{d,1} - \theta_1)}{\sqrt{(\Omega^2 - \Omega_{d,1}^2)^2 + (\gamma \Omega_{d,1})^2}}, \quad (2.145)$$

$$x_2(t) = A_2 \exp(-\gamma t/2) \sin(\Omega' t + \phi_2) + \frac{F_2^{\text{ext}}}{m} \frac{\cos(\Omega_{d,2} t + \varphi_{d,2} - \theta_2)}{\sqrt{(\Omega^2 - \Omega_{d,2}^2)^2 + (\gamma \Omega_{d,2})^2}}, \quad (2.146)$$

kde

$$\theta_1 = \text{arccotg} \left( \frac{\Omega^2 - \Omega_{d,1}^2}{\gamma \Omega_{d,1}} \right), \quad \theta_2 = \text{arccotg} \left( \frac{\Omega^2 - \Omega_{d,2}^2}{\gamma \Omega_{d,2}} \right), \quad (2.147)$$

jak říká vztah (2.129) na str. 166. Sečteme-li obě pohybové rovnice (2.143) a (2.144), dostáváme

$$\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 + \gamma(\dot{x}_1 + \dot{x}_2) + \Omega^2(x_1 + x_2) = F_1^{\text{ext}} \sin(\Omega_{d,1} t) + F_2^{\text{ext}} \sin(\Omega_{d,1} t).$$

Vzhledem k tomu, že derivace součtu funkcí je rovna součtu derivací funkcí, můžeme tuto rovnici dále přepsat takto:

$$\frac{d^2}{dt^2} (x_1 + x_2) + \gamma \frac{d}{dt} (x_1 + x_2) + \Omega^2(x_1 + x_2) = F_1^{\text{ext}} \sin(\Omega_{d,1} t) + F_2^{\text{ext}} \sin(\Omega_{d,1} t).$$

Porovnáním tohoto výsledku s pohybovou rovnicí (2.142) zjišťujeme, že pro její řešení musí platit

$$\begin{aligned} x(t) &= x_1(t) + x_2(t) = \\ &= A_1 \exp(-\gamma t/2) \sin(\Omega' t + \phi_1) + \frac{F_1^{\text{ext}}}{m} \frac{\cos(\Omega_{d,1} t + \varphi_{d,1} - \theta_1)}{\sqrt{(\Omega^2 - \Omega_{d,1}^2)^2 + (\gamma \Omega_{d,1})^2}} + \\ &+ A_2 \exp(-\gamma t/2) \sin(\Omega' t + \phi_2) + \frac{F_2^{\text{ext}}}{m} \frac{\cos(\Omega_{d,2} t + \varphi_{d,2} - \theta_2)}{\sqrt{(\Omega^2 - \Omega_{d,2}^2)^2 + (\gamma \Omega_{d,2})^2}}. \end{aligned} \quad (2.148)$$

Tento výsledek říká, že budící síla (2.141) tvořená součtem dvou harmonicky kmitajících příspěvků o různých amplitudách a úhlových frekvencích způsobí ustálené kmity rovné součtu ustálených kmitů buzených každým příspěvkem zvlášť. Tomuto závěru se někdy říká *princip superpozice* a je důsledkem toho, že pohybová rovnice (2.142) má tvar lineární diferenciální rovnice (lineární kombinace řešení je opět jejím řešením).

Zatím se nám v řešení (2.148) objevují 4 konstanty  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $\phi_1$  a  $\phi_2$ , avšak víme, že ke splnění počátečních podmínek  $x(0) = x_0$  a  $\dot{x}(0) = v_0$  jsou třeba pouze 2 integrační konstanty. Redukce počtu konstant automaticky plyne z toho, že součet dvou harmonických kmitů s různými amplitudami a počátečními fázemi ale se stejnou frekvencí lze vyjádřit pomocí jednoho harmonického kmitu:

$$A_1 \sin(\Omega' t + \phi_1) + A_2 \sin(\Omega' t + \phi_2) = A \sin(\Omega' t + \phi),$$

kde

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\phi_2 - \phi_1)}, \quad \phi = \arctan \left( \frac{A_1 \sin \phi_1 + A_2 \sin \phi_2}{A_1 \cos \phi_1 + A_2 \cos \phi_2} \right).$$

Řešení (2.148) tedy můžeme zapsat ve tvaru se dvěma integračními konstantami  $A$  a  $\phi$  následujícím způsobem:

$$x(t) = A \exp(-\gamma t/2) \sin(\Omega' t + \phi) + \frac{F_1^{\text{ext}}}{m} \frac{\cos(\Omega_{d,1} t + \varphi_{d,1} - \theta_1)}{\sqrt{(\Omega^2 - \Omega_{d,1}^2)^2 + (\gamma \Omega_{d,1})^2}} + \frac{F_2^{\text{ext}}}{m} \frac{\cos(\Omega_{d,2} t + \varphi_{d,2} - \theta_2)}{\sqrt{(\Omega^2 - \Omega_{d,2}^2)^2 + (\gamma \Omega_{d,2})^2}}. \quad (2.149)$$

Zaměříme se pouze na ustálený děj, který nastává po takové době, kdy je hodnota funkce  $\exp(-\gamma t/2)$  již „velmi malá“, jak jsme popsali v předchozím odstavci na str. 166. Potom se řešení (2.149) zjednodušuje na tvar

$$x(t) = \frac{F_1^{\text{ext}}}{m} \frac{\cos(\Omega_{d,1} t + \varphi_{d,1} - \theta_1)}{\sqrt{(\Omega^2 - \Omega_{d,1}^2)^2 + (\gamma \Omega_{d,1})^2}} + \frac{F_2^{\text{ext}}}{m} \frac{\cos(\Omega_{d,2} t + \varphi_{d,2} - \theta_2)}{\sqrt{(\Omega^2 - \Omega_{d,2}^2)^2 + (\gamma \Omega_{d,2})^2}}. \quad (2.150)$$

Podobně jako v předchozím odstavci označme výrazy

$$A_{p,1} \equiv \frac{F_1^{\text{ext}}}{m \sqrt{(\Omega^2 - \Omega_{d,1}^2)^2 + (\gamma \Omega_{d,1})^2}}, \quad A_{p,2} \equiv \frac{F_2^{\text{ext}}}{m \sqrt{(\Omega^2 - \Omega_{d,2}^2)^2 + (\gamma \Omega_{d,2})^2}} \quad (2.151)$$

a tedy nucené kmity (2.150) můžeme potom napsat takto:

$$x(t) = A_{p,1} \cos(\Omega_{d,1} t + \varphi_{d,1} - \theta_1) + A_{p,2} \cos(\Omega_{d,2} t + \varphi_{d,2} - \theta_2). \quad (2.152)$$

Amplitudy  $F_1^{\text{ext}}$  a  $F_2^{\text{ext}}$  a počáteční fáze  $\varphi_{d,1}$  a  $\varphi_{d,2}$  popisující oba harmonické příspěvky budící síly (2.141) můžeme volit libovolně. Pro názornost zadejme tyto konstanty tak, aby platilo

$$A_{p,1} = A_{p,2} = A_p, \quad \varphi_{d,1} - \theta_1 = \varphi_{d,2} - \theta_2 = 0. \quad (2.153)$$

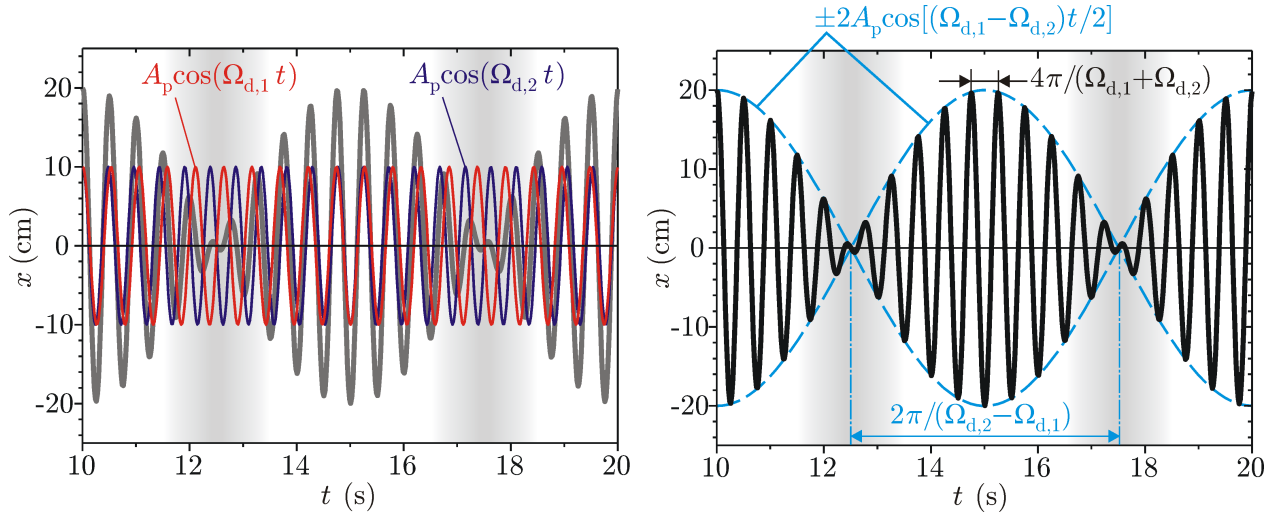
Potom

$$x(t) = A_p \cos(\Omega_{d,1} t) + A_p \cos(\Omega_{d,2} t). \quad (2.154)$$

Pomocí goniometrického vzorce  $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos[(\alpha + \beta)/2] \cos[(\alpha - \beta)/2]$  tuto funkci dále přepíšeme na tvar

$$x(t) = 2A_p \cos\left(\frac{\Omega_{d,1} + \Omega_{d,2}}{2} t\right) \cos\left(\frac{\Omega_{d,1} - \Omega_{d,2}}{2} t\right). \quad (2.155)$$

Nucené kmity jsou tedy rovny součinu funkce kosinus kmitající s aritmetickým průměrem obou frekvencí  $\Omega_{d,1}$  a  $\Omega_{d,2}$  a funkce kosinus kmitající s polovinou jejich rozdílu. Výsledkem jsou tzv. *zázněje* nebo *rázy*, kdy amplituda nosné frekvence  $(\Omega_{d,1} + \Omega_{d,2})/2$  je modulována s podstatně nižší frekvencí  $(\Omega_{d,1} - \Omega_{d,2})/2$ . Na obr. 2.19 je ukázán časový průběh příkladu nucených kmitů v podobě takových záznějů.



Obrázek 2.19: Grafy časového vývoje nucených kmitů  $x(t)$ . Platí  $\Omega_{d,1} = 3,8\pi \text{ s}^{-1}$ ,  $\Omega_{d,2} = 4,2\pi \text{ s}^{-1}$  a  $A_p = 10 \text{ cm}$ . Vlevo:  $x(t)$  podle (2.154) (silná šedá křivka). Jsou ukázány funkce  $A_p \cos(\Omega_{d,1}t)$  (tenká červená křivka) a  $A_p \cos(\Omega_{d,2}t)$  (tenká fialová křivka). V oblastech podbarvených bíle jsou obě funkce ve fázi a tudíž amplituda výsledných kmitů se blíží  $2A_p$ . V oblastech podbarvených šedě mají fázi opačnou a amplituda výsledných kmitů se blíží nule. Vpravo:  $x(t)$  podle (2.155) (silná černá křivka). Jsou ukázány funkce  $\pm 2A_p \cos[(\Omega_{d,1} - \Omega_{d,2})t/2]$  (modré přerušované křivky).

### Mechanická energie

Časovou derivací výchylky  $x(t)$  popsanou funkcí (2.152) dostáváme okamžitou rychlost tělesa  $m$ :

$$\dot{x}(t) = -A_{p,1}\Omega_{d,1} \sin(\Omega_{d,1}t + \varphi_{d,1} - \theta_1) - A_{p,2}\Omega_{d,2} \sin(\Omega_{d,2}t + \varphi_{d,2} - \theta_2). \quad (2.156)$$

Mechanickou energii

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \Omega^2 x^2)$$

pak můžeme vyjádřit takto:

$$E(t) = \frac{1}{2}m \left\{ [A_{p,1}\Omega_{d,1} \sin(\Omega_{d,1}t + \varphi_{d,1} - \theta_1) + A_{p,2}\Omega_{d,2} \sin(\Omega_{d,2}t + \varphi_{d,2} - \theta_2)]^2 + \Omega^2 [A_{p,1} \cos(\Omega_{d,1}t + \varphi_{d,1} - \theta_1) + A_{p,2} \cos(\Omega_{d,2}t + \varphi_{d,2} - \theta_2)]^2 \right\},$$

odkud dále po vyjádření kvadrátů hranatých závorek:

$$E(t) = \frac{1}{2}m \left[ A_{p,1}^2 \Omega_{d,1}^2 \sin^2(\Omega_{d,1}t + \varphi_{d,1} - \theta_1) + A_{p,2}^2 \Omega_{d,2}^2 \sin^2(\Omega_{d,2}t + \varphi_{d,2} - \theta_2) + 2A_{p,1}A_{p,2}\Omega_{d,1}\Omega_{d,2} \sin(\Omega_{d,1}t + \varphi_{d,1} - \theta_1) \sin(\Omega_{d,2}t + \varphi_{d,2} - \theta_2) + A_{p,1}^2 \Omega^2 \cos^2(\Omega_{d,1}t + \varphi_{d,1} - \theta_1) + A_{p,2}^2 \Omega^2 \cos^2(\Omega_{d,2}t + \varphi_{d,2} - \theta_2) + 2A_{p,1}A_{p,2}\Omega^2 \cos(\Omega_{d,1}t + \varphi_{d,1} - \theta_1) \cos(\Omega_{d,2}t + \varphi_{d,2} - \theta_2) \right].$$

Budeme sledovat kroky podobné těm, které vedly ke vztahu (2.138). Nejprve některé členy v hranaté závorce vhodně přepíšeme, takže dostáváme

$$\begin{aligned}
E(t) = \frac{1}{2}m \left\{ A_{p,1}^2 \frac{\Omega^2 + \Omega_{d,1}^2}{2} [\sin^2(\Omega_{d,1}t + \varphi_{d,1} - \theta_1) + \cos^2(\Omega_{d,1}t + \varphi_{d,1} - \theta_1)] - \right. \\
- A_{p,1}^2 \frac{\Omega^2 - \Omega_{d,1}^2}{2} [\sin^2(\Omega_{d,1}t + \varphi_{d,1} - \theta_1) - \cos^2(\Omega_{d,1}t + \varphi_{d,1} - \theta_1)] + \\
+ A_{p,2}^2 \frac{\Omega^2 + \Omega_{d,2}^2}{2} [\sin^2(\Omega_{d,2}t + \varphi_{d,2} - \theta_2) + \cos^2(\Omega_{d,2}t + \varphi_{d,2} - \theta_2)] - \\
- A_{p,2}^2 \frac{\Omega^2 - \Omega_{d,2}^2}{2} [\sin^2(\Omega_{d,2}t + \varphi_{d,2} - \theta_2) - \cos^2(\Omega_{d,2}t + \varphi_{d,2} - \theta_2)] + \\
+ 2A_{p,1}A_{p,2} [\Omega_{d,1}\Omega_{d,2} \sin(\Omega_{d,1}t + \varphi_{d,1} - \theta_1) \sin(\Omega_{d,2}t + \varphi_{d,2} - \theta_2) + \\
+ \Omega^2 \cos(\Omega_{d,1}t + \varphi_{d,1} - \theta_1) \cos(\Omega_{d,2}t + \varphi_{d,2} - \theta_2)] \left. \right\}.
\end{aligned}$$

Užitím  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  a  $\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = -\cos 2\alpha$  lze dále tento výraz zjednodušit:

$$\begin{aligned}
E(t) = \frac{1}{2}m \left\{ A_{p,1}^2 \frac{\Omega^2 + \Omega_{d,1}^2}{2} + A_{p,1}^2 \frac{\Omega^2 - \Omega_{d,1}^2}{2} \cos(2\Omega_{d,1}t + 2\varphi_{d,1} - 2\theta_1) + \right. \\
+ A_{p,2}^2 \frac{\Omega^2 + \Omega_{d,2}^2}{2} + A_{p,2}^2 \frac{\Omega^2 - \Omega_{d,2}^2}{2} \cos(2\Omega_{d,2}t + 2\varphi_{d,2} - 2\theta_2) + \\
+ 2A_{p,1}A_{p,2} [\Omega_{d,1}\Omega_{d,2} \sin(\Omega_{d,1}t + \varphi_{d,1} - \theta_1) \sin(\Omega_{d,2}t + \varphi_{d,2} - \theta_2) + \\
+ \Omega^2 \cos(\Omega_{d,1}t + \varphi_{d,1} - \theta_1) \cos(\Omega_{d,2}t + \varphi_{d,2} - \theta_2)] \left. \right\}.
\end{aligned}$$

Opět zde nacházíme konstantní členy určující střední hodnotu mechanické energie

$$\langle E \rangle = \frac{1}{4}mA_{p,1}^2 (\Omega^2 + \Omega_{d,1}^2) + \frac{1}{4}mA_{p,2}^2 (\Omega^2 + \Omega_{d,2}^2) \quad (2.157)$$

a „kmitající“ členy, které popisují oscilace  $E(t)$  okolo  $\langle E \rangle$ . Dosazením za  $A_{p,1}$  a  $A_{p,2}$  z (2.151) můžeme střední hodnotu mechanické energie vyjádřit v následujícím výsledném tvaru:

$$\langle E \rangle = \frac{(F_1^{\text{ext}})^2}{4m} \frac{\Omega^2 + \Omega_{d,1}^2}{(\Omega^2 - \Omega_{d,1}^2)^2 + (\gamma\Omega_{d,1})^2} + \frac{(F_2^{\text{ext}})^2}{4m} \frac{\Omega^2 + \Omega_{d,2}^2}{(\Omega^2 - \Omega_{d,2}^2)^2 + (\gamma\Omega_{d,2})^2}. \quad (2.158)$$

Porovnáním toho výsledku se vztahem (2.138) pro střední hodnotu mechanické energie oscilátoru buzeného harmonickou silou s jedinou frekvencí můžeme učinit závěr, že

$$\langle E \rangle = \langle E_1 \rangle + \langle E_2 \rangle, \quad (2.159)$$

kde  $\langle E_1 \rangle$  je střední hodnota mechanické energie oscilátoru buzeného harmonickou silou kmitající s frekvencí  $\Omega_{d,1}$  a  $\langle E_2 \rangle$  střední hodnota mechanické energie oscilátoru buzeného harmonickou silou kmitající s frekvencí  $\Omega_{d,2}$ . Objevili jsme tedy důležitý závěr: platí *aditivita* střední hodnoty mechanické energie.

## 2.5.4 Buzení silou periodického průběhu

Budeme se nyní zabývat pohybem harmonického oscilátoru, který je buzen silou mající obecně periodický průběh s periodou  $\tau$ . To znamená, že během jedné periody se  $x$ -ová složka  $F^{\text{ext}}(t)$  budící síly mění libovolně, pouze platí

$$F^{\text{ext}}(t) = F^{\text{ext}}(t + \tau). \quad (2.160)$$



Pohybová rovnice (2.95) na str. 157 tedy již nabývá obecnějšího tvaru

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \Omega^2 x = F^{\text{ext}}(t). \quad (2.161)$$

V Dodatku C na str. 248 je popsáno, jak lze periodickou funkci vyjádřit pomocí nekonečné řady, tzv. *Fourierovy řady*, funkcí sinus a kosinus. Vedení vztahem (3.58) na str. 249 tedy můžeme vnější sílu vyjádřit takto:

$$F^{\text{ext}}(t) = F_{1,0}^{\text{ext}} + \sum_{n=1}^{\infty} [F_{1,n}^{\text{ext}} \cos(2n\pi t/\tau) + F_{2,n}^{\text{ext}} \sin(2n\pi t/\tau)], \quad (2.162)$$

kde  $F_{1,0}^{\text{ext}}$ ,  $F_{1,n}^{\text{ext}}$  a  $F_{2,n}^{\text{ext}}$  jsou tzv. *amplitudy*, které získáme následovně: amplitudu  $F_{1,0}^{\text{ext}}$  určíme pomocí vztahu (3.62) na str. 250:

$$F_{1,0}^{\text{ext}} = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} F^{\text{ext}}(t) dt, \quad (2.163)$$

a dále pro ostatní amplitudy  $F_{1,n}^{\text{ext}}$  a  $F_{2,n}^{\text{ext}}$  platí, viz (3.63) a (3.64) na téže straně:

$$F_{1,n}^{\text{ext}} = \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} \cos(2n\pi t/\tau) F^{\text{ext}}(t) dt \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (2.164)$$

$$F_{2,n}^{\text{ext}} = \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} \sin(2n\pi t/\tau) F^{\text{ext}}(t) dt \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (2.165)$$

Pohyb oscilátoru buzeného silou rovnou součtu dvou harmonických příspěvků  $F_1^{\text{ext}} \cos(\Omega_{d,1}t + \varphi_{d,1})$  a  $F_2^{\text{ext}} \cos(\Omega_{d,2}t + \varphi_{d,2})$  s různými úhlovými frekvencemi  $\Omega_{d,1}$  a  $\Omega_{d,2}$  a různými počátečními fázemi  $\varphi_{d,1}$  a  $\varphi_{d,2}$  jsme popsali v předchozím odstavci. To nás přivádí zpět k tomu, že bychom se mohli pokusit vyjádřit funkci  $F^{\text{ext}}(t)$  pomocí součtu obecně nekonečně mnoha takových harmonických příspěvků, tj.

$$F^{\text{ext}}(t) = \sum_{s=0}^{\infty} F_s^{\text{ext}} \cos(\Omega_{d,s}t + \varphi_{d,s}). \quad (2.166)$$

Porovnáním tohoto vztahu s Fourierovou řadou (2.162) dospíváme k závěru, že platí

$$F_s^{\text{ext}} = F_{1,s/2}^{\text{ext}}, \quad \Omega_{d,s} = \pi s/\tau, \quad \varphi_{d,s} = 0 \quad (s = 0, 2, 4, 6, \dots), \quad (2.167)$$

$$F_s^{\text{ext}} = F_{2,(s+1)/2}^{\text{ext}}, \quad \Omega_{d,s} = \pi(s+1)/\tau, \quad \varphi_{d,s} = -\pi/2 \quad (s = 1, 3, 5, 7, \dots). \quad (2.168)$$

Úhlové frekvence  $\Omega_{d,s}$  jednotlivých příspěvků budící síly tedy již nejsou libovolné, ale vždy se rovnají celočíselnému násobku  $2\pi/\tau$ . Též i počáteční fáze  $\varphi_{d,s}$  jsou předem jednoznačně dány. Jak jsme již zmínili, konkrétní průběh funkce  $F^{\text{ext}}(t)$  udávají pouze amplitudy  $F_{1,n}^{\text{ext}}$  a  $F_{2,n}^{\text{ext}}$  podle vztahů (2.163) až (2.165).

Protože se nám podařilo přepsat funkci  $F^{\text{ext}}(t)$  popisující působení vnější síly jako součet nekonečně mnoha harmonických příspěvků (2.162), můžeme přímo určit i řešení pohybové rovnice (2.161). Výraz (2.149) na str. 174 nás totiž k tomu přímo vybízí, přičemž máme na paměti, že speciálně platí  $\Omega_{d,0} = 0$ :

$$\begin{aligned} x(t) = & A \exp(-\gamma t/2) \sin(\Omega' t + \phi) + \frac{F_{1,0}^{\text{ext}}}{m} \frac{\cos \theta_0}{\Omega^2} + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{F_{1,n}^{\text{ext}}}{m} \frac{\cos(2\pi n t/\tau - \theta_n)}{\sqrt{[\Omega^2 - (2\pi n/\tau)^2]^2 + (\gamma 2\pi n/\tau)^2}} + \right. \\ & \left. + \frac{F_{2,n}^{\text{ext}}}{m} \frac{\sin(2\pi n t/\tau - \theta_n)}{\sqrt{[\Omega^2 - (2\pi n/\tau)^2]^2 + (\gamma 2\pi n/\tau)^2}} \right\}. \end{aligned} \quad (2.169)$$

Fázové konstanty  $\theta_n$  podle (2.147) na str. 173 vycházejí takto:

$$\begin{aligned} \theta_0 &= 0, \\ \theta_n &= \operatorname{arccotg} \left[ \frac{\Omega^2 - (2\pi n/\tau)^2}{\gamma 2\pi n/\tau} \right] \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \end{aligned} \quad (2.170)$$

Stejně jako v předchozím odstavci se zaměříme na ustálený děj, tedy na pohyb buzeného harmonického oscilátoru až od té doby, kdy funkce  $\exp(-\gamma t/2)$  je již „velmi malá“. Potom obecné řešení (2.169) pohybové rovnice (2.161) přejde ve vyjádření nucených kmitů

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{F_{1,0}^{\text{ext}}}{m\Omega^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{F_{1,n}^{\text{ext}}}{m} \frac{\cos(2\pi n t/\tau - \theta_n)}{\sqrt{[\Omega^2 - (2\pi n/\tau)^2]^2 + (\gamma 2\pi n/\tau)^2}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{F_{2,n}^{\text{ext}}}{m} \frac{\sin(2\pi n t/\tau - \theta_n)}{\sqrt{[\Omega^2 - (2\pi n/\tau)^2]^2 + (\gamma 2\pi n/\tau)^2}} \right\}. \end{aligned} \quad (2.171)$$

### Budící síla s lineárním periodickým průběhem

Abychom ukázali konkrétní závislost výchylky harmonického oscilátoru buzeného periodickou silou, budeme například předpokládat, že budící síla má lineární průběh s periodou  $\tau$ . To znamená, že pro  $x$ -ovou složku  $F^{\text{ext}}(t)$  budící síly platí

$$F^{\text{ext}}(t) = Dt \quad \text{pro } t \in \langle 0, \tau \rangle, \quad F^{\text{ext}}(t) = F^{\text{ext}}(t + \tau), \quad (2.172)$$

kde  $D$  je konstanta. Nejprve vypočítáme podle (2.163) amplitudu  $F_{1,0}^{\text{ext}}$ :

$$F_{1,0}^{\text{ext}} = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} Dt \, dt = \frac{D}{\tau} \frac{t^2}{2} \Big|_0^{\tau} = \frac{D\tau}{2}. \quad (2.173)$$

A zbývající amplitudy podle (2.164) a (2.165):

$$\begin{aligned} F_{1,n}^{\text{ext}} &= \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} \cos(2n\pi t/\tau) Dt \, dx = \frac{2D}{\tau} \frac{\cos(2n\pi t/\tau) + (2n\pi t/\tau) \sin(2n\pi t/\tau)}{(2n\pi/\tau)^2} \Big|_0^{\tau} = \\ &= 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \end{aligned} \quad (2.174)$$

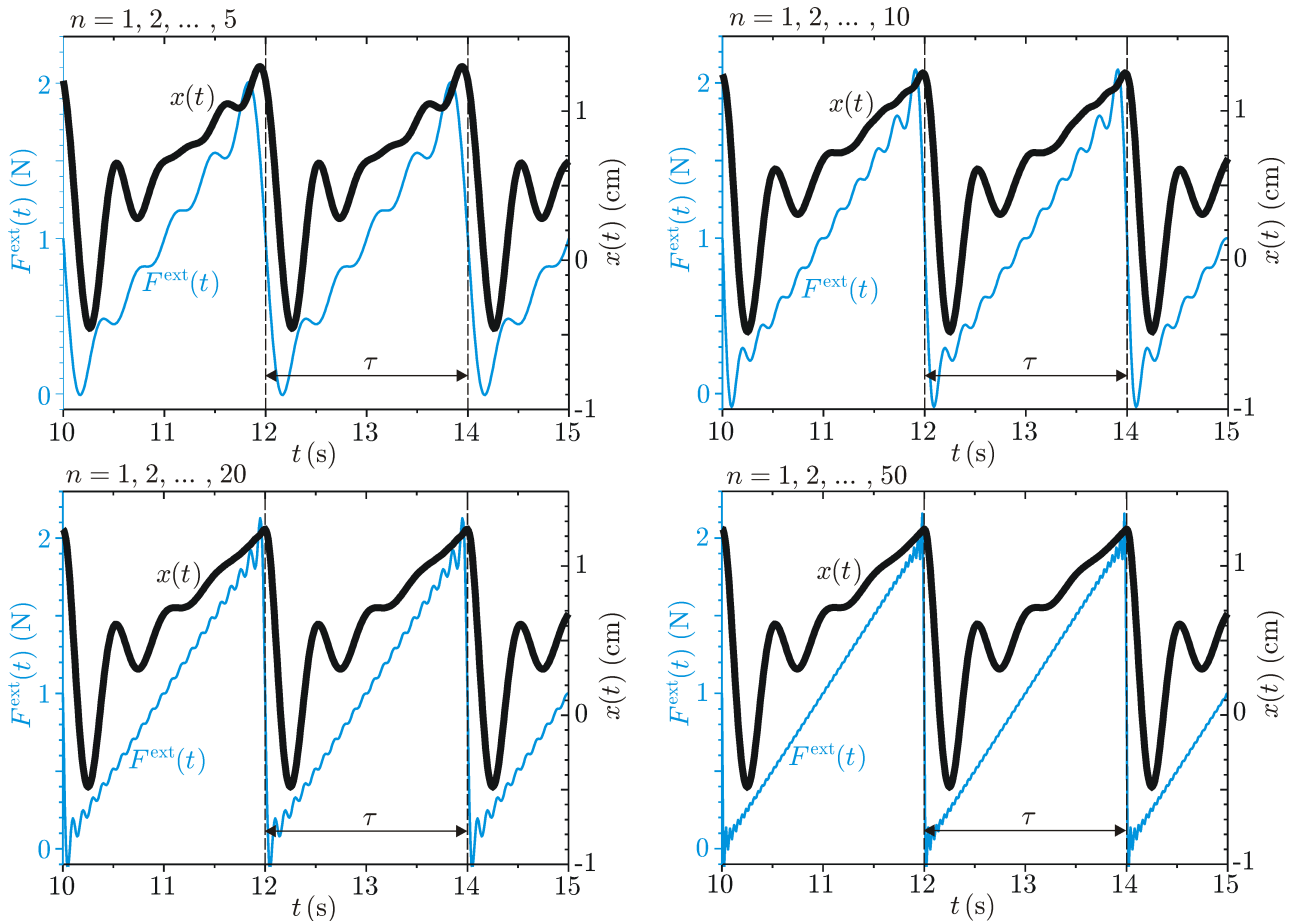
$$\begin{aligned} F_{2,n}^{\text{ext}} &= \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} \sin(2n\pi t/\tau) Dt \, dx = \frac{2D}{\tau} \frac{\sin(2n\pi t/\tau) - (2n\pi t/\tau) \cos(2n\pi t/\tau)}{(2n\pi/\tau)^2} \Big|_0^{\tau} = \\ &= -\frac{D\tau}{n\pi} \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \end{aligned} \quad (2.175)$$

Vidíme, že všechny amplitudy  $F_{1,n}^{\text{ext}}$  pro  $n = 1, 2, 3, \dots$  jsou nulové a velikosti amplitud  $|F_{2,n}^{\text{ext}}|$  klesají nepřímou úměrou s  $n$ . Funkci (2.172) periodickou s periodou  $\tau$  tedy můžeme vyjádřit pomocí Fourierovy řady (2.162) ve tvaru

$$F^{\text{ext}}(t) = \frac{D\tau}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D\tau}{n\pi} \sin(2\pi n t/\tau). \quad (2.176)$$

Podle (2.171) jsou potom výchylky oscilátoru při ustáleném ději popsány nekonečnou řadou

$$x(t) = \frac{D\tau}{2m\Omega^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D\tau}{n\pi m} \frac{\sin(2\pi n t/\tau - \theta_n)}{\sqrt{[\Omega^2 - (2\pi n/\tau)^2]^2 + (\gamma 2\pi n/\tau)^2}}, \quad (2.177)$$



Obrázek 2.20: Grafy časového vývoje  $x$ -ové složky budící díly  $F^{\text{ext}}(t)$  (modré tenké křivky) podle (2.176) a nucených kmitů  $x(t)$  (černé silné křivky) podle (2.177), započítáme-li pouze konečný počet členů v sumách. Platí:  $D = 1 \text{ N s}^{-1}$ ,  $\tau = 2 \text{ s}$ ,  $\Omega = 4\pi \text{ s}^{-1}$ ,  $\gamma/2 = 2\Omega/9$ ,  $m = 1 \text{ kg}$ . Vlevo nahoře: v obou sumách je započítáno pouze prvních 5 členů; vpravo nahoře: prvních 10 členů; vlevo dole: prvních 20 členů; vpravo dole: prvních 50 členů.

kde fázové konstanty  $\theta_n$  jsou určeny vztahy (2.170).

Vyjádření funkcí  $F^{\text{ext}}(t)$  a  $x(t)$  pomocí nekonečných řad v nás možná vyvolává otázku, zda vůbec můžeme tento typ funkčního předpisu nějak prakticky využít. Jak jsme si všimli, amplitudy  $F_{2,n}^{\text{ext}}$  se s rostoucím  $n$  blíží nule. Proto každý další člen v obou řadách představuje postupně vždy menší a menší příspěvek k celkovému výsledku. Předpokládáme tedy, že od nějakého  $n$  již příspěvky dalších členů můžeme zanedbat a nekonečnou řadu tak bude možné aproximovat řadou konečnou.

Na obr. 2.20 jsou znázorněny grafy časového vývoje  $F^{\text{ext}}(t)$  podle (2.176) a  $x(t)$  podle (2.177) s tím, že započítáváme pouze konečný počet členů v obou sumách. Je zřejmé, že vyšší počet členů postupně vede k přesnějšímu vyjádření lineární periodické funkce (2.172), viz modré tenké křivky. Avšak přetrvávající drobné oscilace naznačují, že ani prvních 50 členů ještě nestačí k „uspokojivé“ aproximaci, jak je zřejmé z grafu vpravo dole. Naproti tomu již od prvních 20 členů v sumě (2.177) se výsledky téměř neliší, viz černé silné křivky na obr. 2.20 vlevo dole a vpravo dole.

Vysvětlení těchto skutečností se nyní pokusíme nastínit. Amplitudy  $F_{2,n}^{\text{ext}} = -D\tau/(n\pi)$  u funkcí sinus v sumě (2.176) popisující budící sílu se blíží nule s rostoucím  $n$  nepřímo úměrně. Je tedy zapotřebí vzít opravdu „velké množství“ členů sumy, aby byla funkce  $F^{\text{ext}}(t)$  vyjádřena

s dostatečnou přesností. Říkáme, že řada (2.176) *konverguje pomalu*.

Zatímco funkce sinus v sumě (2.177) jsou vynásobeny amplitudami

$$A_{p,n} = -\frac{D\tau}{n\pi m} \frac{1}{\sqrt{[\Omega^2 - (2\pi n/\tau)^2]^2 + (\gamma 2\pi n/\tau)^2}} \quad (2.178)$$

nucených kmitů pro každou z budících frekvencí  $\Omega_{d,n} = 2\pi n/\tau$ . Připomeňme vztah (2.128) na str. 166, jemuž odpovídal graf 2.15 na str. 168, pro amplitudu  $A_p$  budících kmitů o jedné budící frekvenci  $\Omega_d$ . Tam jsme viděli, že s rostoucí  $\Omega_d$  se též  $A_p$  snižuje a to dokonce kubicky.

Rychlejší klesání příspěvků členů v sumě (2.177) má tedy dvojí původ: s rostoucím  $n$  se amplitudy  $F_{2,n}^{\text{ext}}$  blíží nule (stejně jako v sumě (2.176)), ale navíc se zvyšující se budící frekvencí  $\Omega_{d,n}$  se dále ještě blíží nule samotné amplitudy  $A_{p,n}$  nucených kmitů, viz druhý zlomek v (2.178). Proto můžeme ve vztahu (2.177) „dostatečně přesně“ počítat s podstatně méně členy než ve vztahu (2.176). Řekneme tedy, že řada (2.177) *konverguje rychle*. Tyto úvahy je vždy vhodné provádět, abychom mohli ve výpočtech efektivně zanedbávat nevýznamné členy.

## Mechanická energie

Zaměříme se na mechanickou energii tlumeného harmonického oscilátoru buzeného silou periodického průběhu, avšak pouze na její střední hodnotu  $\langle E \rangle$ . Na konci předcházejícího odstavce jsme dospěli k závěru, že platí její aditivita, viz vztahy (2.157) – (2.159) na str. 176. Vzhledem k tomu, že nyní je budící síla tvořena nekonečně mnoha harmonickými příspěvky s úhlovými frekvencemi  $\Omega_{d,n} = 2\pi n/\tau$ , střední hodnotu mechanické energie vyjádříme nekonečnou řadou

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle E_n \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4} m A_{p,n}^2 (\Omega^2 + \Omega_{d,n}^2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4} m \left( \frac{D\tau}{n\pi m} \right)^2 \frac{\Omega^2 + (2\pi n/\tau)^2}{[\Omega^2 - (2\pi n/\tau)^2]^2 + (\gamma 2\pi n/\tau)^2}.$$

Zbývá ještě přidat příspěvek „nultého“ konstantního členu v (2.177)

$$\frac{1}{2} k \left( \frac{D\tau}{2m\Omega^2} \right)^2 = \frac{1}{2} m \Omega^2 \left( \frac{D\tau}{2m\Omega^2} \right)^2 = \frac{(D\tau)^2}{8m\Omega^2}.$$

Střední hodnota mechanické energie pak vyjde

$$\langle E \rangle = \frac{(D\tau)^2}{8m\Omega^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(D\tau)^2}{4m(n\pi)^2} \frac{\Omega^2 + (2\pi n/\tau)^2}{[\Omega^2 - (2\pi n/\tau)^2]^2 + (\gamma 2\pi n/\tau)^2}. \quad (2.179)$$

Abychom zjistili, jak rychle tato řada konverguje, vyjádříme prvních několik součtů konečné řady

$$\frac{(D\tau)^2}{8m\Omega^2} + \sum_{n=1}^N \frac{(D\tau)^2}{4m(n\pi)^2} \frac{\Omega^2 + (2\pi n/\tau)^2}{[\Omega^2 - (2\pi n/\tau)^2]^2 + (\gamma 2\pi n/\tau)^2} \quad (2.180)$$

pro případ popsany na obr. 2.20, tj. platí:  $\Omega = 4\pi \text{ s}^{-1}$ ,  $\gamma/2 = 2\Omega/9$ ,  $m = 1 \text{ kg}$ ,  $\tau = 2 \text{ s}$ ,

$$D = 1 \text{ N s}^{-1}:$$

$$\begin{aligned} \frac{(D\tau)^2}{8m\Omega^2} &= 3,1662 \text{ mJ}, \\ N = 5: \quad \frac{(D\tau)^2}{8m\Omega^2} + \sum_{n=1}^5 \frac{(D\tau)^2}{4m(n\pi)^2} \frac{\Omega^2 + (2\pi n/\tau)^2}{[\Omega^2 - (2\pi n/\tau)^2]^2 + (\gamma 2\pi n/\tau)^2} &= 5,1384 \text{ mJ}, \\ N = 10: \quad \frac{(D\tau)^2}{8m\Omega^2} + \sum_{n=1}^{10} \frac{(D\tau)^2}{4m(n\pi)^2} \frac{\Omega^2 + (2\pi n/\tau)^2}{[\Omega^2 - (2\pi n/\tau)^2]^2 + (\gamma 2\pi n/\tau)^2} &= 5,1876 \text{ mJ}, \\ N = 20: \quad \frac{(D\tau)^2}{8m\Omega^2} + \sum_{n=1}^{20} \frac{(D\tau)^2}{4m(n\pi)^2} \frac{\Omega^2 + (2\pi n/\tau)^2}{[\Omega^2 - (2\pi n/\tau)^2]^2 + (\gamma 2\pi n/\tau)^2} &= 5,1910 \text{ mJ}, \\ N = 50: \quad \frac{(D\tau)^2}{8m\Omega^2} + \sum_{n=1}^{50} \frac{(D\tau)^2}{4m(n\pi)^2} \frac{\Omega^2 + (2\pi n/\tau)^2}{[\Omega^2 - (2\pi n/\tau)^2]^2 + (\gamma 2\pi n/\tau)^2} &= 5,1914 \text{ mJ}. \end{aligned}$$

Opět vidíme, že již prvních 20 členů řady (2.179) dává výsledek, který se „příliš“ nemění, přidáme-li členů více. Tato řada tudíž konverguje rychle. Střední hodnotu  $\langle E \rangle$  proto můžeme s „dobrou“ aproximací vyjádřit konečnou řadou (2.180), kde  $N = 20$ .

### 2.5.5 Buzení silou obecného průběhu

Má-li budicí síla zcela obecný průběh, není výhodné nadále využívat Fourierových řad. Ukážeme, že lze takové úlohy řešit, avšak pro zachování výkladu používajícího ne příliš komplikovaných matematických vyjádření budeme předpokládat zanedbatelnou odporovou sílu, neboli  $\gamma \cong 0$ . Pohybová rovnice (2.95) na str. 157 je pak následující:

$$\ddot{x} + \Omega^2 x = \frac{F^{\text{ext}}(t)}{m}. \quad (2.181)$$

Tuto diferenciální rovnici druhého řádu lze totiž převést na diferenciální rovnici prvního řádu a to pomocí následující substituce. Zavedeme novou komplexní funkci  $\nu(t)$  v tomto tvaru:

$$\nu = \dot{x} + i\Omega x. \quad (2.182)$$

Znamená to, že reálná část této funkce je přímo rovna okamžité rychlosti tělesa  $m$ , zatímco imaginární část je rovna jeho okamžité výchylce vynásobené vlastní úhlovou frekvencí harmonického oscilátoru. Neboli

$$x(t) = \frac{\text{Im}\{\nu(t)\}}{\Omega}, \quad (2.183)$$

$$\dot{x}(t) = \text{Re}\{\nu(t)\}. \quad (2.184)$$

Z (2.182) vyplývá, že časová derivace  $\nu(t)$  je dána vztahem

$$\dot{\nu} = \ddot{x} + i\Omega \dot{x}, \quad (2.185)$$

a proto můžeme psát

$$\dot{\nu} - i\Omega \nu = \ddot{x} + i\Omega \dot{x} - i\Omega \dot{x} + \Omega^2 x = \ddot{x} + \Omega^2 x.$$

Porovnání tohoto výsledku s levou stranou pohybové rovnice (2.181) můžeme pohyb buzeného harmonického oscilátoru vyjádřit rovnicí

$$\dot{\nu} - i\Omega \nu = \frac{F^{\text{ext}}(t)}{m}. \quad (2.186)$$

Tím se nám opravdu podařilo pohybovou rovnici převést na diferenciální rovnici prvního řádu. Po nalezení jejího řešení  $\nu(t)$  s počáteční podmínkou

$$\nu(0) = v(0) + i\Omega x(0) = v_0 + i\Omega x_0 \quad (2.187)$$

můžeme ihned vyjádřit výchylku  $x(t)$  pomocí (2.183) a rychlost  $\dot{x}(t)$  pomocí (2.184). Nyní ukážeme, že rovnice (2.186) bude mít řešení ve tvaru

$$\nu(t) = V_+(t) \exp(i\Omega t), \quad (2.188)$$

kde  $V_+(t)$  je zatím neznámá komplexní funkce reálné proměnné  $t$ . Derivací dostáváme

$$\dot{\nu}(t) = \dot{V}_+(t) \exp(i\Omega t) + i\Omega V_+(t) \exp(i\Omega t) \quad (2.189)$$

a obě funkce  $\nu(t)$  a  $\dot{\nu}(t)$  dosadíme zpět do (2.186):

$$\dot{V}_+(t) \exp(i\Omega t) + i\Omega V_+(t) \exp(i\Omega t) - i\Omega V_+(t) \exp(i\Omega t) = \frac{F^{\text{ext}}(t)}{m}.$$

Druhý a třetí člen na levé straně se vyruší a po vynásobení rovnice výrazem  $\exp(-i\Omega t)$  dostáváme

$$\dot{V}_+(t) = \frac{F^{\text{ext}}(t) \exp(-i\Omega t)}{m}.$$

Integrací již získáváme návod jak určit neznámou funkci  $V_+(t)$

$$V_+(t) = \frac{1}{m} \int F^{\text{ext}}(t) \exp(-i\Omega t) dt \quad (2.190)$$

s počáteční podmínkou (2.187)

$$V_+(0) = \nu(0) = v_0 + i\Omega x_0, \quad (2.191)$$

neboť podle (2.188) platí  $\nu(0) = V_+(0)$ .

### Nulová budící síla

Pojďme se nejdříve ujistit, zda všechny naše dosavadní kroky byly správné. Bude-li

$$F^{\text{ext}}(t) = 0,$$

tzn. jde-li o vlastní kmity netlumeného harmonického oscilátoru popsané v odst. 2.2 na str. 138, rovnice (2.190) s počáteční podmínkou (2.191) říká:

$$V_+(t) = V_+(0) = v_0 + i\Omega x_0, \quad (2.192)$$

neboli  $V_+(t)$  je v tomto případě konstantní funkcí. Potom podle (2.188) je řešením rovnice (2.186) s nulovou budící silou a počáteční podmínkou (2.191) funkce

$$\begin{aligned} \nu(t) &= (v_0 + i\Omega x_0) \exp(i\Omega t) = (v_0 + i\Omega x_0) (\cos \Omega t + i \sin \Omega t) = \\ &= v_0 \cos \Omega t - \Omega x_0 \sin \Omega t + i(v_0 \sin \Omega t + \Omega x_0 \cos \Omega t). \end{aligned}$$

Vztahy (2.183) a (2.184) nám potom ihned udávají okamžitou polohu a rychlost tělesa  $m$ :

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{\text{Im}\{\nu(t)\}}{\Omega} = \frac{v_0}{\Omega} \sin \Omega t + x_0 \cos \Omega t, \\ \dot{x}(t) &= \text{Re}\{\nu(t)\} = v_0 \cos \Omega t - \Omega x_0 \sin \Omega t. \end{aligned}$$

Vidíme, že funkce  $\dot{x}(t)$  je vskutku derivací funkce  $x(t)$ . A dále, zavedeme-li namísto dvou reálných konstant  $x_0$  a  $v_0$  jiné dvě reálné konstanty  $A$  a  $\phi$ , pro něž platí

$$x_0 = A \sin \phi, \quad \frac{v_0}{\Omega} = A \cos \phi,$$

potom užitím goniometrických vzorců  $\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \sin(\alpha + \beta)$  a  $\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha + \beta)$  nakonec dostáváme

$$x(t) = A \sin(\Omega t + \phi), \quad (2.193)$$

$$\dot{x}(t) = \Omega A \cos(\Omega t + \phi). \quad (2.194)$$

Tento výsledek jsme již mnohokrát obdrželi, viz např. (2.14) a (2.15) na str. 139.

### Konstantní budicí síla

Dále se věnujme případu konstantní budicí síly

$$F^{\text{ext}}(t) = mg,$$

tedy netlumenému harmonickému oscilátoru v tíhovém poli. Touto problematikou jsme se zabývali v odst. 2.5.1 na str. 158. Podle (2.190) a (2.191) dostáváme

$$V_+(t) = \int g \exp(-i\Omega t) dt = \frac{ig}{\Omega} \exp(-i\Omega t) + v_0 + i\Omega x_0 - \frac{ig}{\Omega}, \quad (2.195)$$

přičemž se ujišťujeme, že platí počáteční podmínka (2.191). Funkci  $\nu(t)$  potom získáváme užitím vztahu (2.188):

$$\begin{aligned} \nu(t) &= \left[ \frac{ig}{\Omega} \exp(-i\Omega t) + v_0 + i\Omega x_0 - \frac{ig}{\Omega} \right] \exp(i\Omega t) = \frac{ig}{\Omega} + \left( v_0 + i\Omega x_0 - \frac{ig}{\Omega} \right) \exp(i\Omega t) = \\ &= \frac{ig}{\Omega} + \left( v_0 + i\Omega x_0 - \frac{ig}{\Omega} \right) (\cos \Omega t + i \sin \Omega t) = v_0 \cos \Omega t + \left( \frac{g}{\Omega} - \Omega x_0 \right) \sin \Omega t + \\ &+ i \left[ v_0 \sin \Omega t + \left( \Omega x_0 - \frac{g}{\Omega} \right) \cos \Omega t + \frac{g}{\Omega} \right]. \end{aligned}$$

Pomocí (2.183) a (2.184) nakonec určíme okamžitou polohu a rychlost:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{\text{Im}\{\nu(t)\}}{\Omega} = \frac{v_0}{\Omega} \sin \Omega t + \left( x_0 - \frac{g}{\Omega^2} \right) \cos \Omega t + \frac{g}{\Omega^2}, \\ \dot{x}(t) &= \text{Re}\{\nu(t)\} = v_0 \cos \Omega t + \left( \frac{g}{\Omega} - \Omega x_0 \right) \sin \Omega t. \end{aligned}$$

Opět se můžeme přesvědčit o tom, že funkce  $\dot{x}(t)$  je derivací funkce  $x(t)$ . Dále zavedeme namísto  $x_0$  a  $v_0$  nové konstanty  $A$  a  $\phi$ , pro které platí

$$x_0 - \frac{g}{\Omega^2} = A \sin \phi, \quad \frac{v_0}{\Omega} = A \cos \phi.$$

Potom

$$x(t) = A \sin(\Omega t + \phi) + \frac{mg}{k}, \quad (2.196)$$

$$\dot{x}(t) = \Omega A \cos(\Omega t + \phi), \quad (2.197)$$

neboť  $\Omega^2 = k/m$ . Stejný výsledek představují vztahy (2.103) a (2.104) na str. 160, položíme-li  $\gamma = 0$ .

### Harmonicky kmitající budicí síla

Budicí sílu, která kmitá harmonicky, popíšeme funkcí

$$F^{\text{ext}}(t) = F_0^{\text{ext}} \cos(\Omega_d t + \varphi_d),$$

kde  $F_0^{\text{ext}}$  je (reálná) amplituda,  $\Omega_d$  úhlová frekvence a  $\varphi_d$  je fáze budicí síly, viz (2.110) na str. 162. Funkci  $V_+(t)$  potom nalezneme podle (2.190) ve tvaru

$$\begin{aligned} V_+(t) &= \frac{1}{m} \int F_0^{\text{ext}} \cos(\Omega_d t + \varphi_d) \exp(-i\Omega t) dt = \\ &= \frac{F_0^{\text{ext}}}{m} \frac{i\Omega \cos(\Omega_d t + \varphi_d) - \Omega_d \sin(\Omega_d t + \varphi_d)}{\Omega^2 - \Omega_d^2} \exp(-i\Omega t) + \\ &+ v_0 + i\Omega x_0 - \frac{F_0^{\text{ext}}}{m} \frac{i\Omega \cos \varphi_d - \Omega_d \sin \varphi_d}{\Omega^2 - \Omega_d^2} \end{aligned} \quad (2.198)$$

splňujícím počáteční podmínku (2.191). Z (2.188) dále plyne funkční předpis funkce  $\nu(t)$ :

$$\begin{aligned} \nu(t) &= \left\{ \frac{F_0^{\text{ext}}}{m} \frac{i\Omega \cos(\Omega_d t + \varphi_d) - \Omega_d \sin(\Omega_d t + \varphi_d)}{\Omega^2 - \Omega_d^2} \exp(-i\Omega t) + \right. \\ &+ \left. v_0 + i\Omega x_0 - \frac{F_0^{\text{ext}}}{m} \frac{\Omega_d \sin \varphi_d - i\Omega \cos \varphi_d}{\Omega^2 - \Omega_d^2} \right\} \exp(i\Omega t) = \\ &= \frac{F_0^{\text{ext}}}{m} \frac{i\Omega \cos(\Omega_d t + \varphi_d) - \Omega_d \sin(\Omega_d t + \varphi_d)}{\Omega^2 - \Omega_d^2} + \\ &+ \left[ v_0 + i\Omega x_0 - \frac{F_0^{\text{ext}}}{m} \frac{\Omega_d \sin \varphi_d - i\Omega \cos \varphi_d}{\Omega^2 - \Omega_d^2} \right] (\cos \Omega t + i \sin \Omega t) = \\ &= \left( v_0 - \frac{F_0^{\text{ext}}}{m} \frac{\Omega_d \sin \varphi_d}{\Omega^2 - \Omega_d^2} \right) \cos \Omega t - \left( \Omega x_0 + \frac{F_0^{\text{ext}}}{m} \frac{\Omega \cos \varphi_d}{\Omega^2 - \Omega_d^2} \right) \sin \Omega t - \frac{F_0^{\text{ext}}}{m} \frac{\Omega_d \sin(\Omega_d t + \varphi_d)}{\Omega^2 - \Omega_d^2} + \\ &+ i \left[ \left( v_0 - \frac{F_0^{\text{ext}}}{m} \frac{\Omega_d \sin \varphi_d}{\Omega^2 - \Omega_d^2} \right) \sin \Omega t + \left( \Omega x_0 + \frac{F_0^{\text{ext}}}{m} \frac{\Omega \cos \varphi_d}{\Omega^2 - \Omega_d^2} \right) \cos \Omega t + \frac{F_0^{\text{ext}}}{m} \frac{\Omega \cos(\Omega_d t + \varphi_d)}{\Omega^2 - \Omega_d^2} \right]. \end{aligned}$$

A vztahy (2.183) a (2.184) nám pak určují  $x(t)$  a  $\dot{x}(t)$ :

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{\text{Im}\{\nu(t)\}}{\Omega} = \\ &= \left( \frac{v_0}{\Omega} - \frac{F_0^{\text{ext}}}{m\Omega} \frac{\Omega_d \sin \varphi_d}{\Omega^2 - \Omega_d^2} \right) \sin \Omega t + \left( x_0 + \frac{F_0^{\text{ext}}}{m} \frac{\cos \varphi_d}{\Omega^2 - \Omega_d^2} \right) \cos \Omega t + \frac{F_0^{\text{ext}}}{m} \frac{\cos(\Omega_d t + \varphi_d)}{\Omega^2 - \Omega_d^2}, \\ \dot{x}(t) &= \text{Re}\{\nu(t)\} = \\ &= \left( v_0 - \frac{F_0^{\text{ext}}}{m} \frac{\Omega_d \sin \varphi_d}{\Omega^2 - \Omega_d^2} \right) \cos \Omega t - \left( \Omega x_0 + \frac{F_0^{\text{ext}}}{m} \frac{\Omega \cos \varphi_d}{\Omega^2 - \Omega_d^2} \right) \sin \Omega t - \frac{F_0^{\text{ext}}}{m} \frac{\Omega_d \sin(\Omega_d t + \varphi_d)}{\Omega^2 - \Omega_d^2}. \end{aligned}$$

Nakonec zaměníme konstanty  $x_0$  a  $v_0$  za  $A$  a  $\phi$ , pro které nyní platí

$$\Omega x_0 + \frac{F_0^{\text{ext}}}{m} \frac{\Omega \cos \varphi_d}{\Omega^2 - \Omega_d^2} = A \sin \phi, \quad v_0 - \frac{F_0^{\text{ext}}}{m} \frac{\Omega_d \sin \varphi_d}{\Omega^2 - \Omega_d^2} = A \cos \phi.$$

Odtud

$$x(t) = A \sin(\Omega t + \phi) + \frac{F_0^{\text{ext}}}{m} \frac{\cos(\Omega_d t + \varphi_d)}{\Omega^2 - \Omega_d^2}, \quad (2.199)$$

$$\dot{x}(t) = \Omega A \cos(\Omega t + \phi) - \frac{F_0^{\text{ext}}}{m} \frac{\Omega_d \sin(\Omega_d t + \varphi_d)}{\Omega^2 - \Omega_d^2}. \quad (2.200)$$



Výsledek (2.199) je totožný s (2.119) na str. 164, pokud položíme  $\gamma = 0$ . Všimněte si, že v důsledku nulového tření vlastní kmitů  $A \sin(\Omega t + \phi)$  oscilátoru nevymizí, a tudíž neexistuje ustálený děj. A dále amplituda kmitů roste nade všechny meze, když  $\Omega_d \rightarrow \Omega$ .

### Lineárně rostoucí budicí síla

Nyní budeme předpokládat, že budicí síla lineárně roste podle funkce

$$F^{\text{ext}}(t) = Dt, \quad (2.201)$$

kde  $D$  je (reálná) konstanta. Podle (2.190) a počáteční podmínky (2.191) bude funkce  $V_+(t)$  následující:

$$V_+(t) = \frac{1}{m} \int Dt \exp(-i\Omega t) dt = \frac{D}{m} \frac{i\Omega t + 1}{\Omega^2} \exp(-i\Omega t) + v_0 + i\Omega x_0 - \frac{D}{m\Omega^2}. \quad (2.202)$$

Podle (2.188) potom funkce  $\nu(t)$  vyjde ve tvaru:

$$\begin{aligned} \nu(t) &= \left[ \frac{D}{m} \frac{i\Omega t + 1}{\Omega^2} \exp(-i\Omega t) + v_0 + i\Omega x_0 - \frac{D}{m\Omega^2} \right] \exp(i\Omega t) = \\ &= \frac{D}{m} \frac{i\Omega t + 1}{\Omega^2} + \left( v_0 + i\Omega x_0 - \frac{D}{m\Omega^2} \right) (\cos \Omega t + i \sin \Omega t) = \\ &= \frac{D}{m\Omega^2} + \left( v_0 - \frac{D}{m\Omega^2} \right) \cos \Omega t - \Omega x_0 \sin \Omega t + \\ &+ i \left[ \frac{Dt}{m\Omega} + \left( v_0 - \frac{D}{m\Omega^2} \right) \sin \Omega t + \Omega x_0 \cos \Omega t \right]. \end{aligned} \quad (2.203)$$

Výchylka  $x(t)$  a rychlost  $\dot{x}(t)$  jsou potom

$$x(t) = \frac{\text{Im}\{\nu(t)\}}{\Omega} = \frac{Dt}{m\Omega^2} + \left( \frac{v_0}{\Omega} - \frac{D}{m\Omega^3} \right) \sin \Omega t + x_0 \cos \Omega t, \quad (2.204)$$

$$\dot{x}(t) = \text{Re}\{\nu(t)\} = \frac{D}{m\Omega^2} + \left( v_0 - \frac{D}{m\Omega^2} \right) \cos \Omega t - \Omega x_0 \sin \Omega t, \quad (2.205)$$

viz vztahy (2.183) a (2.184).

Nyní provedeme úvahy o střední hodnotě podobné těm, které jsme učinili v případě tlumeného oscilátoru buzeného harmonickou silou, viz odst. 2.5.2 na str. 168. Vidíme, že obě veličiny obsahují členy s goniometrickými funkcemi popisujícími oscilace i členy bez nich, které vyjadřují střední hodnotu, okolo nichž kmitají. Střední hodnoty  $\langle x \rangle$  a  $\langle \dot{x} \rangle$  jsou tedy rovny příslušným členům bez funkcí sinus a kosinus:

$$\langle x \rangle = \frac{Dt}{m\Omega^2}, \quad (2.206)$$

$$\langle \dot{x} \rangle = \frac{D}{m\Omega^2}. \quad (2.207)$$

Vztah (2.206) říká, že se střední hodnota polohy  $\langle x \rangle$  rovnoměrně přemísťuje v kladném směru osy  $x$ . To se děje v důsledku lineárního průběhu budicí síly (2.201). Můžeme si vzpomenout na případ, kdy konstantní budicí síla způsobuje konstantní posun střední hodnoty polohy tělesa z rovnovážné polohy, viz vztah (2.196) pro harmonický oscilátor v tíhovém poli.

Střední hodnota rychlosti  $\langle \dot{x} \rangle$  podle (2.207) je samozřejmě rovna časové derivaci  $\langle x \rangle$ . Není překvapující, že pro harmonický oscilátor v tíhovém poli (konstantní budící síla) je střední hodnota rychlosti nulová, jak vidíme ve vztahu (2.197).

Věnujme se samotnému pohybu harmonického oscilátoru buzeného lineárně rostoucí silou (2.201) a předpokládejme tyto počáteční podmínky:

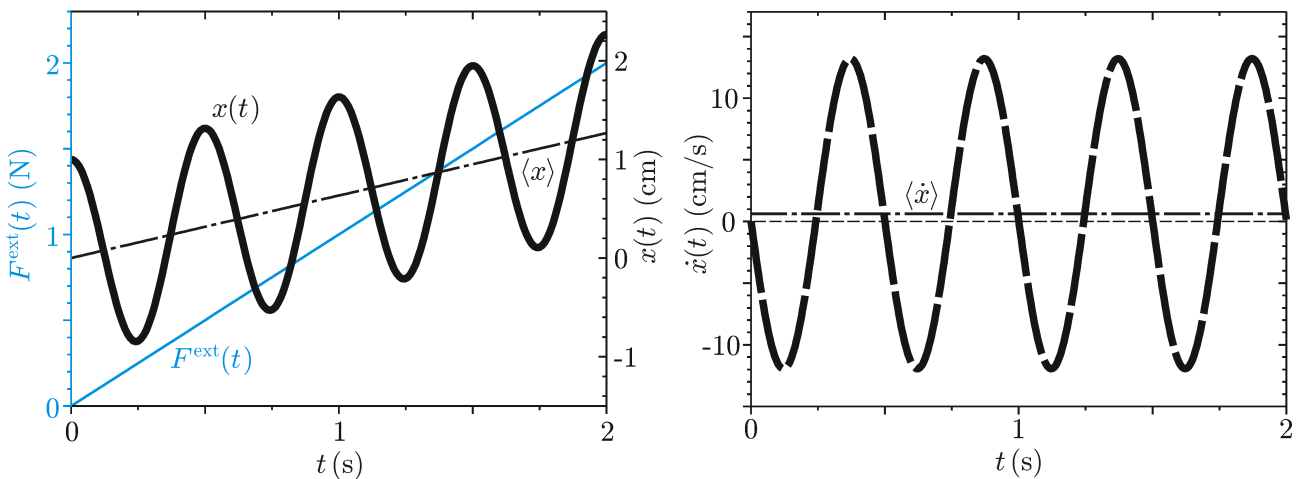
$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0 = 0. \quad (2.208)$$

Výchylka (2.204) a rychlost (2.205) budou v takovém případě

$$x(t) = \frac{Dt}{m\Omega^2} - \frac{D}{m\Omega^3} \sin \Omega t + x_0 \cos \Omega t, \quad (2.209)$$

$$\dot{x}(t) = \frac{D}{m\Omega^2} - \frac{D}{m\Omega^2} \cos \Omega t - \Omega x_0 \sin \Omega t. \quad (2.210)$$

Na obr. 2.21 vlevo jsou ukázány grafy funkcí  $F^{\text{ext}}(t)$  (modrá tenká křivka) a  $x(t)$  (černá silná křivka) spolu s  $\langle x \rangle$  (černá čerchovaná čára). Hodnoty konstant byly nastaveny stejně jako v případě na obr. 2.20, str. 179. Vzhledem k tomu, že nyní je útlum nulový, amplituda výchylky se s časem nemění. Na obr. (2.21) vpravo je graf rychlosti  $\dot{x}(t)$  (černá silná přerušovaná křivka) a  $\langle \dot{x} \rangle$  (černá čerchovaná čára).



Obrázek 2.21: Vlevo: Grafy časového vývoje  $x$ -ové složky budící díly  $F^{\text{ext}}(t)$  (modrá tenká křivka) podle vztahu (2.201) a polohy  $x(t)$  (černá silná křivka) podle vztahu (2.209). Střední hodnota výchylky  $\langle x \rangle$  určená funkcí (2.206) je také naznačena (černá čerchovaná čára). Platí:  $D = 1 \text{ N s}^{-1}$ ,  $\Omega = 4\pi \text{ s}^{-1}$ ,  $m = 1 \text{ kg}$ ,  $x_0 = 1 \text{ cm}$ . Vpravo: Graf rychlosti  $\dot{x}(t)$  (černá silná přerušovaná křivka) podle (2.210). Je též ukázána její střední hodnota  $\langle \dot{x} \rangle \cong 6,3 \text{ mm/s}$  (černá čerchovaná čára), viz (2.207).

## Mechanická energie

Vyhledem k tomu, že funkce  $\nu(t)$  podle (2.185) obsahuje výchylku  $x(t)$  i rychlost  $\dot{x}(t)$  zároveň, můžeme mechanickou energii  $E$  netlumeného harmonického oscilátoru buzeného obecnou silou vyjádřit pomocí ní takto:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(\Omega x)^2 = \frac{1}{2}m (\text{Re}\{\nu(t)\}^2 + \text{Im}\{\nu(t)\}^2),$$

protože  $k = m\Omega^2$ . Výraz v závorce je však vyjádřením kvadrátu modulu komplexní funkce  $\nu(t)$ , viz Dodatek C, vztah (3.19) na str. 236. Proto můžeme mechanickou energii psát v obecném tvaru

$$E = \frac{1}{2}m|\nu(t)|^2. \quad (2.211)$$

Funkce  $\nu(t)$  tu tedy má význam jakési komplexní rychlosti.

Pro případ lineárně rostoucí budící síly (2.201) má  $\nu(t)$  funkční předpis (2.203). Mechanickou energii (2.211) pro tento případ tedy můžeme vyjádřit takto:

$$E = \frac{1}{2}m \left\{ \left[ \frac{D}{m\Omega^2} + \left( v_0 - \frac{D}{m\Omega^2} \right) \cos \Omega t - \Omega x_0 \sin \Omega t \right]^2 + \left[ \frac{Dt}{m\Omega} + \left( v_0 - \frac{D}{m\Omega^2} \right) \sin \Omega t + \Omega x_0 \cos \Omega t \right]^2 \right\}.$$

Po dalších úpravách ji nalezneme v tomto tvaru:

$$E = \frac{1}{2}m \left\{ \left( \frac{D}{m\Omega^2} \right)^2 (1 + \Omega^2 t^2) + \left( v_0 - \frac{D}{m\Omega^2} \right)^2 + (\Omega x_0)^2 + \frac{2D}{m\Omega^2} \left[ \left( v_0 - \frac{D}{m\Omega^2} \right) \cos \Omega t - \Omega x_0 \sin \Omega t \right] + \frac{2Dt}{m\Omega} \left[ \left( v_0 - \frac{D}{m\Omega^2} \right) \sin \Omega t + \Omega x_0 \cos \Omega t \right] \right\}. \quad (2.212)$$

Derivace  $E$  podle času je rovna okamžitému výkonu  $P$ , se kterým vnější síla  $F^{\text{ext}}(t)$  zvyšuje mechanickou energii oscilátoru, tedy

$$P \equiv \frac{dE}{dt} = \frac{D^2 t}{m\Omega^2} + Dt \left[ \left( v_0 - \frac{D}{m\Omega^2} \right) \cos \Omega t - \Omega x_0 \sin \Omega t \right].$$

Užitím vztahů (2.201) pro  $F^{\text{ext}}(t)$  a (2.205) pro  $\dot{x}$  pak můžeme  $P$  vyjádřit takto:

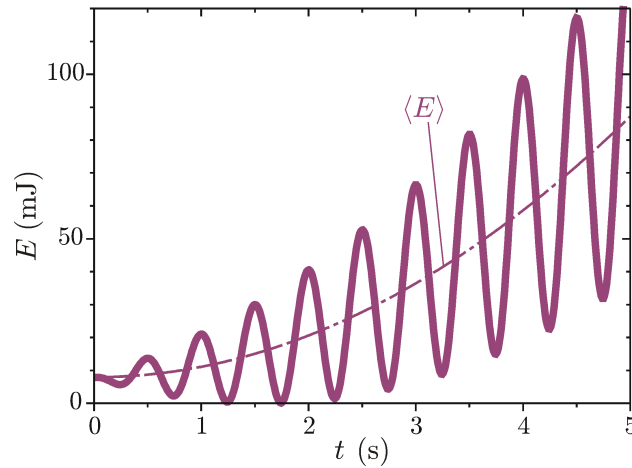
$$P = Dt \left[ \frac{D}{m\Omega^2} + \left( v_0 - \frac{D}{m\Omega^2} \right) \cos \Omega t - \Omega x_0 \sin \Omega t \right] = F^{\text{ext}}(t) \dot{x}.$$

Neboli výkon budící síly je roven součinu  $F^{\text{ext}}(t)$  a rychlosti  $\dot{x}$ , jak známe ze základního kurzu mechaniky, viz např. D. Halliday, R. Resnick, J. Walker: *Fyzika*. 2. vydání, VUTIUM, Brno 2013, kap. 7, vztah (7.48).

Ve vztahu (2.212) opět vidíme, že mechanická energie obsahuje členy s goniometrickými funkcemi popisujícími oscilace i členy bez nich. Ty jsou zřejmě rovny střední hodnotě  $\langle E \rangle$  mechanické energie, a proto

$$\langle E \rangle = \frac{1}{2}m \left[ \left( \frac{D}{m\Omega^2} \right)^2 (1 + \Omega^2 t^2) + \left( v_0 - \frac{D}{m\Omega^2} \right)^2 + (\Omega x_0)^2 \right]. \quad (2.213)$$

Na obr. 2.22 je zobrazena ukázka časového vývoje mechanické energie  $E$  podle (2.212) a též i její střední hodnoty  $\langle E \rangle$  podle (2.213).



Obrázek 2.22: Časový vývoj mechanické energie  $E$ , viz vztah (2.212), a střední hodnoty  $\langle E \rangle$  mechanické energie (tenká čerchovaná křivka), viz vztah (2.213). Platí stejné hodnoty parametrů jako na obr. 2.21, tj.  $D = 1 \text{ N s}^{-1}$ ,  $\Omega = 4\pi \text{ s}^{-1}$ ,  $m = 1 \text{ kg}$ ,  $x_0 = 1 \text{ cm}$ ,  $v_0 = 0 \text{ cm/s}$ .

## 2.6 Anharmonické kmity

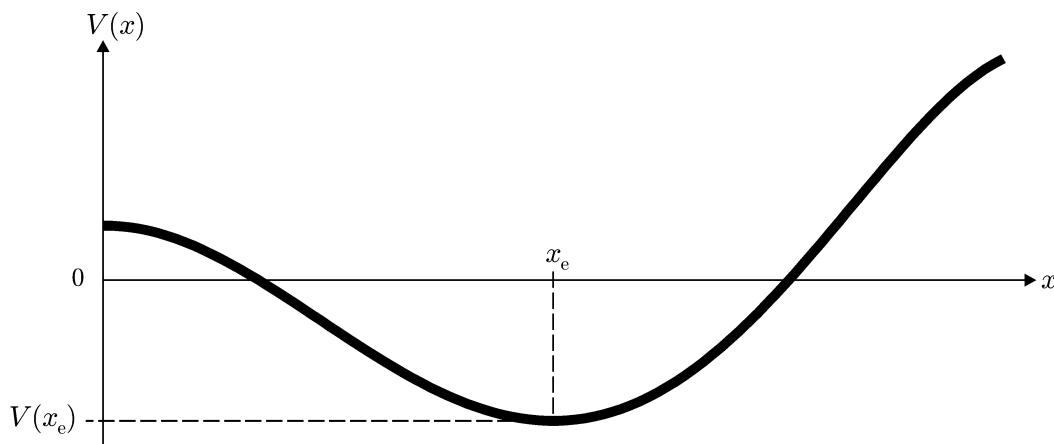
Na samém začátku této kapitoly v odst. 2.1 na str. 137 jsme uvedli, že kmitání mechanické soustavy vždy nastává okolo takového bodu, kde potenciální energie  $V$  nabývá minima, a tento bod jsme nazvali rovnovážnou polohou. Je-li  $V$  funkcí jediné proměnné  $x$ , pak vztahy (2.3) a (2.4) na téže straně můžeme vyjádřit následovně:

$$\left. \frac{dV}{dx} \right|_{x=x_e} = 0, \quad (2.214)$$

kde  $x = x_e$  je rovnovážná poloha. To, že  $V(x)$  nabývá v bodě  $x_e$  (lokálního či globálního) minima, udává podmínka

$$\left. \frac{d^2V}{dx^2} \right|_{x=x_e} > 0. \quad (2.215)$$

Na obr. 2.23 je ukázán graf funkce  $V(x)$  mající uvedené vlastnosti.



Obrázek 2.23: Graf funkce  $V(x)$  s minimem v bodě  $x = x_e$ .

Dosud jsme počítali s potenciální energií harmonického oscilátoru sestávajícího z pružiny o tuhosti  $k$  a tělesa o hmotnosti  $m$  danou funkčním předpisem

$$V_{\text{harm}}(x) = \frac{1}{2}kx^2, \quad (2.216)$$

viz (2.6) na str. 138. Odtud nám vyšla rovnovážná poloha  $x_e = 0$ , jak ukazuje vztah (2.9) na str. 139. Skutečnost, že jde o minimum, dokládá nerovnost (2.215):

$$\left. \frac{d^2V_{\text{harm}}}{dx^2} \right|_{x=x_e} = k > 0. \quad (2.217)$$

A konečně vratnou sílu jsme vyjádřili vztahem (2.12) na str. 139:

$$F_{\text{harm}}^{\text{vrat}}(x) = -\frac{dV_{\text{harm}}}{dx} = -kx. \quad (2.218)$$

Zabývejme se nyní případy, kdy potenciální energie  $V$  nebude mít funkční předpis (2.216), ale obecný tvar  $V(x)$  s tím, že v bodě  $x_e$  nabývá lokálního minima. Potom můžeme funkci  $V(x)$  vyjádřit v okolí bodu  $x = x_e$  pomocí Taylorova polynomu:

$$\begin{aligned} V(x) = & V(x_e) + \left. \frac{dV}{dx} \right|_{x=x_e} (x - x_e) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2V}{dx^2} \right|_{x=x_e} (x - x_e)^2 + \\ & + \frac{1}{6} \left. \frac{d^3V}{dx^3} \right|_{x=x_e} (x - x_e)^3 + \frac{1}{24} \left. \frac{d^4V}{dx^4} \right|_{x=x_e} (x - x_e)^4 + \dots \end{aligned} \quad (2.219)$$

Vzhledem k tomu, že v bodě  $x_e$  má funkce  $V(x)$  minimum, druhý člen je automaticky roven nule, viz (2.214). Označme derivace vyšších řádů v bodě  $x_e$  postupně

$$\left. \frac{d^2V}{dx^2} \right|_{x=x_e} \equiv k, \quad \left. \frac{d^3V}{dx^3} \right|_{x=x_e} \equiv -2m\alpha, \quad \left. \frac{d^4V}{dx^4} \right|_{x=x_e} \equiv 6m\beta, \quad (2.220)$$

kde  $m$  je hmotnost tělesa. Potom pro dostatečně malé  $|x - x_e|$  můžeme šestý a další členy Taylorova polynomu (2.219) v „dobré“ aproximaci zanedbat, a proto

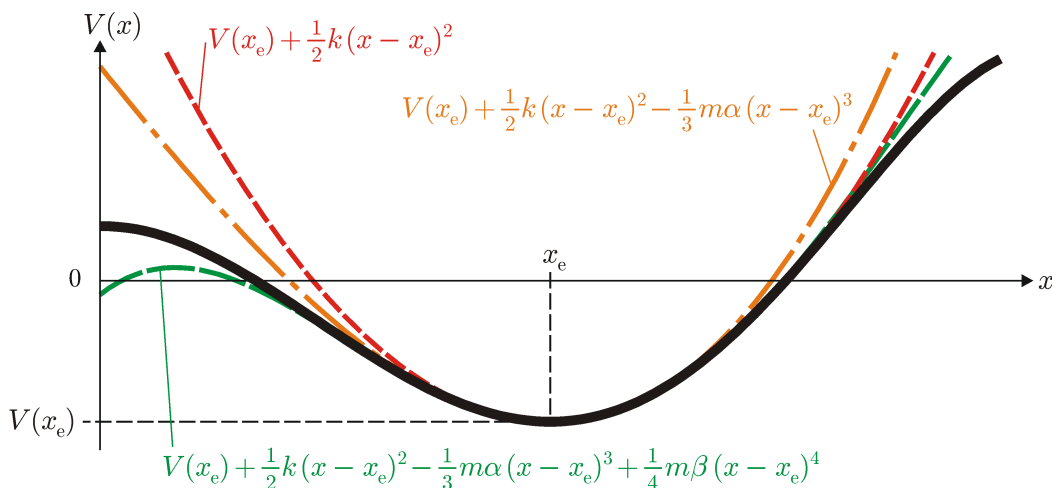
$$V(x) \cong V(x_e) + \frac{1}{2}k(x - x_e)^2 - \frac{1}{3}m\alpha(x - x_e)^3 + \frac{1}{4}m\beta(x - x_e)^4. \quad (2.221)$$

Na obr. 2.24 je ukázán graf funkce  $V(x)$  spolu s grafy postupných součtů uvedených členů. Je zřejmé, že přidáváním dalších členů bude výsledek „uspokojivě“ odpovídat původní funkci  $V(x)$  ve stále širším intervalu v okolí bodu  $x = x_e$ .

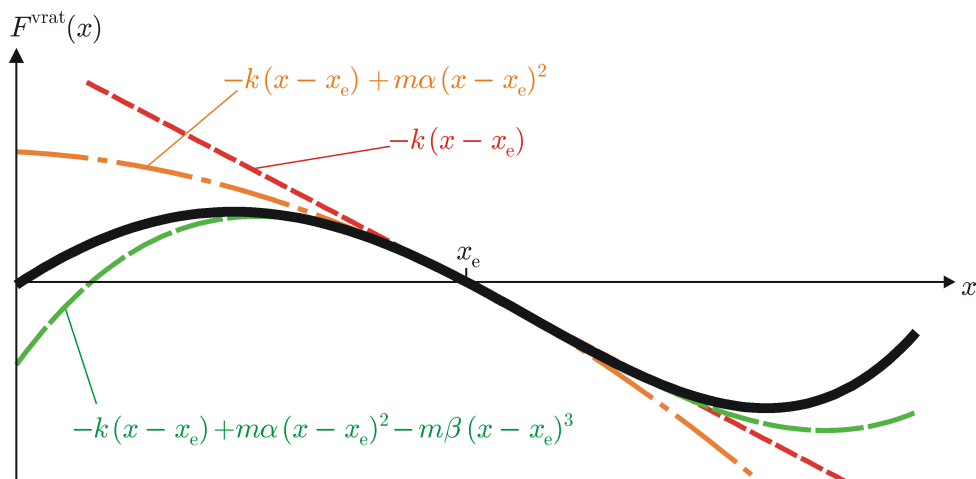
Vratnou sílu dostaneme z potenciální energie (2.221) obdobně jako vratnou sílu harmonického oscilátoru ve vztahu (2.218):

$$F^{\text{vrat}}(x) = -\frac{dV}{dx} \cong -k(x - x_e) + m\alpha(x - x_e)^2 - m\beta(x - x_e)^3. \quad (2.222)$$

Vidíme, že konstanta  $V(x_e)$  nemá na průběh vratné síly vliv, a tudíž může být libovolná. Lineární člen  $-k(x - x_e)$  nám připomíná vratnou sílu  $F_{\text{harm}}^{\text{vrat}}(x - x_e)$  harmonického oscilátoru s rovnovážnou polohou v bodě  $x = x_e$ , jehož pohyb je popsán harmonickými kmity „posunutými“ o  $x_e$ :  $x(t) = x_e + A \sin(\Omega t + \phi)$ . Další členy zřejmě udávají, jak se vratná síla od lineárního průběhu liší. Oscilátoru s nelineárním průběhem vratné síly říkáme *anharmónický oscilátor* a jeho pohyb se nazývá *anharmónické kmity*. Graf průběhu vratné síly  $F^{\text{vrat}}(x)$  spolu s grafy postupných součtů členů v (2.222) je ukázán na obr. 2.25.



Obrázek 2.24: Graf funkce  $V(x)$  s minimem v bodě  $x = x_e$  s grafy postupných součtů členů v (2.221). Člen odpovídající kvadratické potenciální energii harmonického oscilátoru je zakreslen červenou krátce přerušovanou křivkou.



Obrázek 2.25: Graf funkce  $F^{\text{vrat}}(x)$  s rovnovážnou polohou v bodě  $x = x_e$ . Jsou též ukázány grafy postupných součtů členů v (2.222). Člen odpovídající lineární vratné síle harmonického oscilátoru je zakreslen červenou krátce přerušovanou čarou.

Pohybovou rovnicí anharmonického oscilátoru dostaneme tak, že na pravou stranu pohybové rovnice harmonického oscilátoru (2.223) na str. 190 napíšeme vratnou sílu podle (2.222):

$$m\ddot{x} = F^{\text{vrat}}(x) = -k(x - x_e) + m\alpha(x - x_e)^2 - m\beta(x - x_e)^3,$$

odkud

$$\ddot{x} + \Omega^2(x - x_e) - \alpha(x - x_e)^2 + \beta(x - x_e)^3 = 0. \tag{2.223}$$

Protože obecné řešení  $x(t)$  takové diferenciální rovnice nelze vyjádřit konečným počtem elementárních funkcí, jako tomu bylo dosud, je třeba hledat aproximativní postupy. Proto pro tento účel budeme v dalších výpočtech předpokládat, že

$$|\alpha(x - x_e)| \ll \Omega^2, \quad |\beta|(x - x_e)^2 \ll \Omega^2. \tag{2.224}$$

To znamená, že se  $F^{\text{vrat}}(x)$  „příliš neliší“ od lineární vratné síly  $F_{\text{harm}}^{\text{vrat}}(x - x_e)$  harmonického oscilátoru, a tudíž můžeme říci, že kmity jsou jen „slabě“ anharmonické.

Jaký bude náš odhad řešení  $x(t)$  pohybové rovnice (2.223)? Vzhledem k tomu, že stále jde o kmity, funkce  $x(t)$  je nadále funkcí periodickou s periodou

$$\tau_{\text{an}} = 2\pi/\Omega_{\text{an}}, \quad (2.225)$$

kde  $\Omega_{\text{an}}$  je zatím neznámá úhlová frekvence anharmonických kmitů, která se obecně může lišit od  $\Omega$ . V Dodatku C na str. 240 jsme popsali, že lze periodické funkce vyjádřit nekonečnou řadou bázových funkcí  $\varphi_{\pm n}$  vynásobených amplitudami  $a_{\pm n}$ . Funkci  $x(t)$  nejprve vyjádříme v komplexním tvaru, a proto použijeme exponenciální řadu s bázovými funkcemi (3.70) na str. 252, které nyní mají tvar

$$\begin{aligned} \varphi_0(t) &= 1, \\ \varphi_{\pm n}(t) &= \exp(\pm i2n\pi t/\tau_{\text{an}}) = \exp(\pm in\Omega_{\text{an}}t) \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \end{aligned} \quad (2.226)$$

Řešení  $x(t)$  pohybové rovnice (2.223) tedy podle (3.72) na str. 252 předpokládáme ve tvaru

$$\begin{aligned} x(t) &= x_e + a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \exp(in\Omega_{\text{an}}t) + a_{-n} \exp(-in\Omega_{\text{an}}t)] = x_e + a_0 + a_1 \exp(i\Omega_{\text{an}}t) + \\ &+ a_{-1} \exp(-i\Omega_{\text{an}}t) + a_2 \exp(i2\Omega_{\text{an}}t) + a_{-2} \exp(-i2\Omega_{\text{an}}t) + a_3 \exp(i3\Omega_{\text{an}}t) + \\ &+ a_{-3} \exp(-i3\Omega_{\text{an}}t) + a_4 \exp(i4\Omega_{\text{an}}t) + a_{-4} \exp(-i4\Omega_{\text{an}}t) + \dots \end{aligned} \quad (2.227)$$

Členy s indexy  $\pm 1$  odpovídají základním kmitům s úhlovou frekvencí  $\Omega_{\text{an}}$ . Členy s indexy  $\pm 2$  popisují kmity s frekvencí  $2\Omega_{\text{an}}$ , a proto se jim říká kmity s *druhou harmonickou frekvencí*. Členy s indexy  $\pm 3$  zřejmě zastupují kmity s *třetí harmonickou frekvencí* atd.

Derivací (2.227) dále dostáváme rychlost

$$\dot{x}(t) = i\Omega_{\text{an}} \sum_{n=1}^{\infty} n [a_n \exp(in\Omega_{\text{an}}t) - a_{-n} \exp(-in\Omega_{\text{an}}t)]. \quad (2.228)$$

Abychom následující výpočty více zpřehlednili, již nyní zvolme počáteční podmínky, a to v následujícím tvaru:

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad (2.229)$$

neboli na začátku má oscilátor nenulovou výchylku, ale nulovou rychlost. Užitím těchto počátečních podmínek totiž z (2.228) a (2.227) ihned dostáváme

$$\begin{aligned} \dot{x}(0) &= i\Omega_{\text{an}} \sum_{n=1}^{\infty} n (a_n - a_{-n}) = 0, \\ x(0) &= x_e + a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{-n}) = x_0. \end{aligned}$$

Aby byla první podmínka splněna, musí platit

$$a_n = a_{-n} \equiv A_n/2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

kde jsme zavedli nové reálné konstanty  $A_n$ . Ze druhé potom dále plyne

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n = x_0 - x_e. \quad (2.230)$$

Předpokládané řešení (2.227) se tudíž ještě zjednoduší na tvar

$$\begin{aligned} x(t) &= x_e + a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n [\exp(in\Omega_{\text{an}}t) + \exp(-in\Omega_{\text{an}}t)] = \\ &= x_e + a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega_{\text{an}}t) \end{aligned} \quad (2.231)$$

a též i rychlost:

$$\dot{x}(t) = -\Omega_{\text{an}} \sum_{n=1}^{\infty} n A_n \sin(n\Omega_{\text{an}}t). \quad (2.232)$$

### 2.6.1 Lineární vratná síla

Nejprve si ověříme, zda a za jakých podmínek je (2.231) řešením pohybové rovnice pro harmonický oscilátor, tj. pohybové rovnice (2.223), když  $\alpha = \beta = 0$ :

$$\ddot{x} + \Omega^2(x - x_e) = 0. \quad (2.233)$$

Druhá derivace (2.231) vyjde takto:

$$\ddot{x}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-\Omega_{\text{an}}^2 n^2) A_n \cos(n\Omega_{\text{an}}t). \quad (2.234)$$

Po dosazení (2.234) a (2.231) zpět do pohybové rovnice (2.233) pak dostáváme

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-\Omega_{\text{an}}^2 n^2) A_n \cos(n\Omega_{\text{an}}t) + \Omega^2 a_0 + \Omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega_{\text{an}}t) = 0.$$

Obě sumy můžeme vyjádřit sumou jedinou, z níž dále vypíšeme první její člen:

$$\Omega^2 a_0 + (\Omega^2 - \Omega_{\text{an}}^2) A_1 \cos(\Omega_{\text{an}}t) + \sum_{n=2}^{\infty} (\Omega^2 - \Omega_{\text{an}}^2 n^2) A_n \cos(n\Omega_{\text{an}}t) = 0.$$

Je zřejmé, že levá strana bude vždy rovna nule tehdy, když

$$a_0 = 0, \quad \Omega_{\text{an}} = \Omega, \quad A_2 = A_3 = A_4 = \dots = 0,$$

přičemž amplituda  $A_1$  zde představuje integrační konstantu, kterou určíme z počáteční podmínky (2.230). Tím dostáváme řešení ve tvaru

$$x(t) = x_e + A_1 \cos(\Omega t) = x_e + (a_0 - x_e) \cos(\Omega t).$$

Tento výsledek odpovídá vyjádření kmitů okolo rovnovážné polohy  $x_e$ . Např. funkce (2.15) na str. 139 popisuje stejné kmity okolo rovnovážné polohy  $x = 0$ , když dosadíme  $\phi = \pi/2$ .

Můžeme usoudit, že pro nenulová  $\alpha$  nebo  $\beta$ , tj. pro nelineární vratnou sílu, již  $a_0$  a amplitudy  $A_2, A_3, A_4, \dots$  kmitů s vyššími harmonickými frekvencemi nebudou nulové, avšak vzhledem k (2.224) budou obecně jejich velikosti „podstatně menší“ než velikost  $A_1$ , tedy

$$|A_1| \gg |a_0|, |A_2|, |A_3|, |A_4|, \dots \quad (2.235)$$

Pro další postup bude přehlednější diskutovat zvlášť případy, kdy je  $\alpha$  nenulová a zároveň je nulová  $\beta$  a naopak.



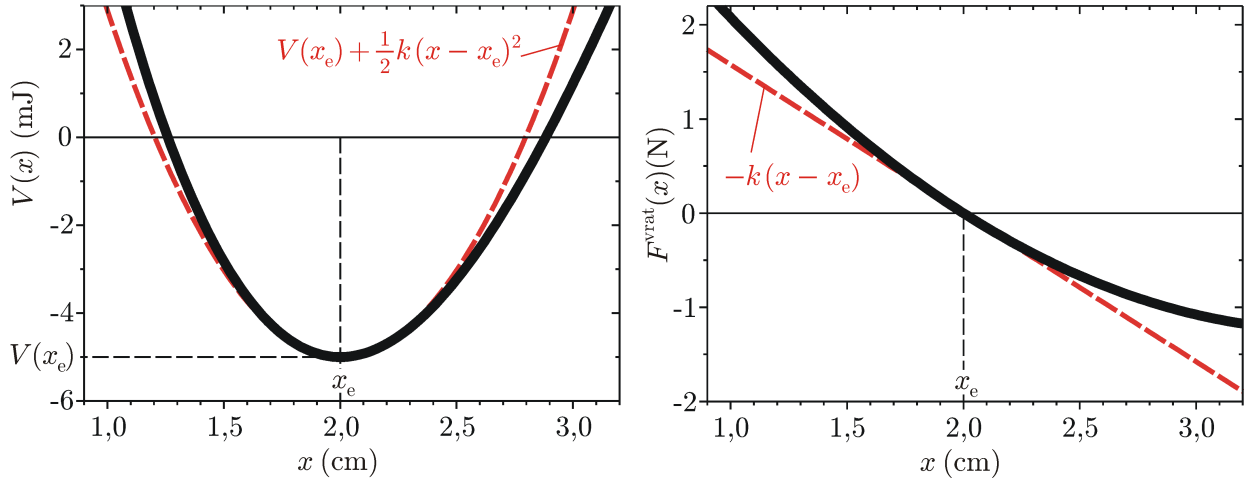
### 2.6.2 Vratná síla s kvadratickým členem

Uvažujme o situaci, kdy je konstanta  $\beta$  rovna nule. Potom potenciální energie  $V(x)$  a vratná síla  $F^{\text{vrat}}(x)$  jsou podle (2.221) a (2.222) následující:

$$V(x) = V(x_e) + \frac{1}{2}k(x - x_e)^2 - \frac{1}{3}m\alpha(x - x_e)^3, \quad (2.236)$$

$$F^{\text{vrat}}(x) = -k(x - x_e) + m\alpha(x - x_e)^2. \quad (2.237)$$

Příklad, jak závisí na poloze  $x$  potenciální energie  $V$  a vratná síla  $F^{\text{vrat}}$  s kvadratickým členem, je na obr. 2.26.



Obrázek 2.26: Průběh potenciální energie  $V(x)$  podle (2.236) (vlevo) a vratné síly  $F^{\text{vrat}}(x)$  (vpravo) podle (2.237). Členy odpovídající případu (lineárního) harmonického oscilátoru jsou znázorněny červenou čárkovanou křivkou. Platí:  $x_e = 2$  cm,  $V(x_e) = -5$  mJ,  $m = 1$  kg,  $\Omega = 4\pi$  s<sup>-1</sup>  $\Rightarrow k = m\Omega^2 = 16\pi^2$  kg s<sup>-1</sup> a  $\alpha = 50$  cm<sup>-1</sup> s<sup>-2</sup>.

Tudíž pohybová rovnice (2.223) je nyní ve tvaru

$$\ddot{x} + \Omega^2(x - x_e) - \alpha(x - x_e)^2 = 0. \quad (2.238)$$

Dosadíme-li předpokládané řešení (2.231) a jeho druhou derivaci (2.234) do této rovnice, dostáváme

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-\Omega_{\text{an}}^2 n^2) A_n \cos(n\Omega_{\text{an}} t) + \Omega^2 a_0 + \Omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega_{\text{an}} t) - \alpha \left[ a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega_{\text{an}} t) \right]^2 = 0.$$

První dvě sumy vyjádříme pomocí jedné sumy a roznásobíme kvadrát hranaté závorky:

$$\Omega^2 a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\Omega^2 - \Omega_{\text{an}}^2 n^2) A_n \cos(n\Omega_{\text{an}} t) - \alpha a_0^2 - 2\alpha a_0 \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega_{\text{an}} t) - \alpha \left[ \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega_{\text{an}} t) \right]^2 = 0. \quad (2.239)$$

Konstanty  $\alpha$  a  $a_0$  považujeme za „malé“ veličiny, a proto první dva členy ve druhém řádku obsahující jejich součin zanedbáme jako veličiny „ještě menší“ než „malé“. Dále ještě roznásobíme kvadrát sumy v hranaté závorce. Potom

$$\Omega^2 a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\Omega^2 - \Omega_{\text{an}}^2 n^2) A_n \cos(n\Omega_{\text{an}} t) - \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_n A_m \cos(n\Omega_{\text{an}} t) \cos(m\Omega_{\text{an}} t) = 0.$$

Užitím goniometrického vzorce  $\cos \gamma \cos \delta = \frac{1}{2} [\cos(\gamma + \delta) + \cos(\gamma - \delta)]$  ještě můžeme tuto rovnici upravit do tvaru

$$\begin{aligned} & \Omega^2 a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\Omega^2 - \Omega_{\text{an}}^2 n^2) A_n \cos(n\Omega_{\text{an}} t) - \\ & - \frac{1}{2} \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_n A_m \{ \cos[(n+m)\Omega_{\text{an}} t] + \cos[(n-m)\Omega_{\text{an}} t] \} = 0. \end{aligned} \quad (2.240)$$

Jak víme,  $A_1$  je amplituda základních kmitů. Ve srovnání s její velikostí budou  $|A_2|, |A_3|, \dots$  podstatně „menší“, viz (2.235). Proto velikosti součinů všech uvedených amplitud kromě  $A_1^2$  budou „ještě menšími“ veličinami. Neboli platí

$$|A_1^2| \gg |A_n A_l|, \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (l = 2, 3, 4, \dots).$$

Podobně jsme vlastně uvažovali již při úpravě (2.238), kde jsme členy s  $\alpha a_0$  považovali za „ještě menší“ než zbývající veličiny. V dvojité sumě sumě v rovnici (2.240) tak můžeme zanedbat všechny sčítance obsahující tyto „ještě menší“ součiny kromě prvního s indexy  $n = m = 1$ :

$$\Omega^2 a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\Omega^2 - \Omega_{\text{an}}^2 n^2) A_n \cos(n\Omega_{\text{an}} t) - \frac{1}{2} \alpha A_1^2 [\cos(2\Omega_{\text{an}} t) + 1] = 0.$$

Z poslední sumy dále vypíšeme první dva členy a nakonec konstantní výrazy a členy reprezentující kmity s příslušnou harmonickou frekvencí dáme k sobě:

$$\begin{aligned} & \Omega^2 a_0 - \frac{1}{2} \alpha A_1^2 + (\Omega^2 - \Omega_{\text{an}}^2) A_1 \cos(\Omega_{\text{an}} t) + [(\Omega^2 - 4\Omega_{\text{an}}^2) A_2 - \frac{1}{2} \alpha A_1^2] \cos(2\Omega_{\text{an}} t) + \\ & + \sum_{n=3}^{\infty} (\Omega^2 - \Omega_{\text{an}}^2 n^2) A_n \cos(n\Omega_{\text{an}} t) = 0. \end{aligned}$$

Aby tato rovnice platila vždy, součet obou konstantních členů a všechny závorky před funkcemi kosinus musejí být rovny nule. Odtud platí následující vztahy:

$$a_0 = \frac{\alpha A_1^2}{2\Omega^2}, \quad \Omega_{\text{an}} = \Omega, \quad A_2 = -\frac{\alpha A_1^2}{6\Omega^2}, \quad A_3 = A_4 = \dots = 0. \quad (2.241)$$

Řešení (2.231) proto nalzáme ve tvaru

$$x(t) = x_e + \frac{\alpha A_1^2}{2\Omega^2} + A_1 \cos(\Omega t) - \frac{\alpha A_1^2}{6\Omega^2} \cos(2\Omega t). \quad (2.242)$$

Člen  $A_1 \cos(\Omega t)$  popisující kmity s úhlovou frekvencí  $\Omega$  odpovídá pohybu harmonického oscilátoru s lineárním průběhem vratné síly. Konstantní člen a člen kmitající s dvojnásobnou úhlovou frekvencí  $2\Omega$  je důsledkem nelinearity vratné síly a oba vymizí, položíme-li  $\alpha = 0$ . Stále však musíme zajistit, aby platila podmínka (2.224) vlevo říkající, že kmity jsou „slabě“

anharmónické. Proto v naší aproximaci amplituda  $A_1$  nemůže nabývat libovolných hodnot, ale omezuje ji relace

$$\frac{|\alpha A_1|}{\Omega^2} \ll 1. \quad (2.243)$$

Tato amplituda je zde zároveň samozřejmě integrační konstantou a tak ji určíme pomocí (2.230):

$$\frac{\alpha A_1^2}{2\Omega^2} + A_1 - \frac{\alpha A_1^2}{6\Omega^2} = x_0 - x_e \quad \Rightarrow \quad \frac{\alpha A_1^2}{3\Omega^2} + A_1 - x_0 + x_e = 0.$$

S ohledem na (2.243) můžeme kvadratický člen zanedbat, a proto

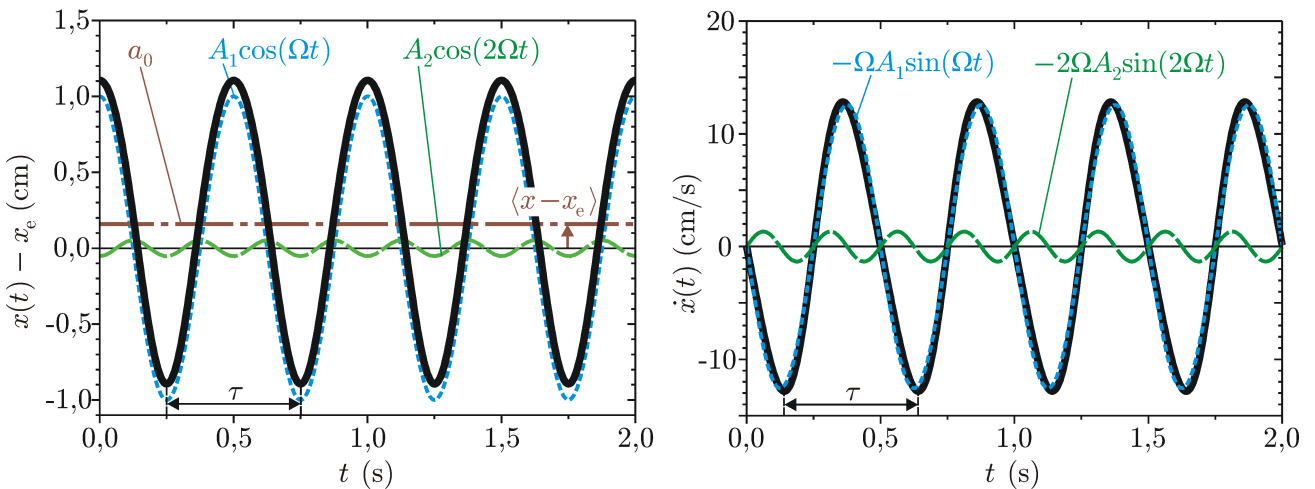
$$A_1 \cong x_0 - x_e. \quad (2.244)$$

Kmity  $x(t)$  slabě anharmonického oscilátoru s vratnou silou (2.222) obsahující pouze lineární a kvadratický člen splňující počáteční podmínky (2.230) jsou tedy nakonec následující:

$$x(t) = x_e + \frac{\alpha(x_0 - x_e)^2}{2\Omega^2} + (x_0 - x_e) \cos(\Omega t) - \frac{\alpha(x_0 - x_e)^2}{6\Omega^2} \cos(2\Omega t). \quad (2.245)$$

Rychlost dále vyjde

$$\dot{x}(t) = -\Omega(x_0 - x_e) \sin(\Omega t) + \frac{\alpha(x_0 - x_e)^2}{3\Omega} \sin(2\Omega t). \quad (2.246)$$



Obrázek 2.27: Výchylka a rychlost slabě anharmonického oscilátoru s vratnou silou (2.222) obsahující pouze lineární a kvadratický člen. Platí:  $\Omega = 4\pi \text{ s}^{-1}$ ,  $\alpha = 50 \text{ cm}^{-1} \text{ s}^{-2}$ ,  $x_0 - x_e = 1 \text{ cm}$ . Tudíž perioda anharmonických kmitů vychází  $\tau = 2\pi/\Omega = 0,5 \text{ s}$ . Vlevo: Graf  $x(t) - x_e$  podle (2.245) s barevně vyznačenými jednotlivými členy. Konstantní člen  $a_0 = \alpha(x_0 - x_e)^2 / (2\Omega^2) \cong 0,15 \text{ cm}$  (hnědá čerchovaná čára) odpovídá posunutí střední hodnoty  $\langle x - x_e \rangle$  výchylky z rovnovážné polohy. Vpravo: Graf  $\dot{x}(t)$  podle (2.246) opět s vyznačenými oběma členy.

Na obr. 2.27 jsou ukázky grafů funkcí  $x(t)$  a  $\dot{x}(t)$  včetně grafů jednotlivých členů. Hodnoty veličin charakterizujících slabě anharmonický oscilátor byly zvoleny následovně:  $\Omega = 4\pi \text{ s}^{-1}$  a  $\alpha = 50 \text{ cm}^{-1} \text{ s}^{-2}$ . Počáteční výchylka  $x_0 - x_e = 1 \text{ cm}$  dává podle (2.244)  $A_1 = 1 \text{ cm}$ . Pro levou stranu podmínky (2.243) „slabé“ anharmoničnosti tedy platí  $\alpha A_1 / \Omega^2 \cong 0,32$ . To znamená, že

jsme hodnotu  $A_1$  nastavili až za samou mez platnosti aproximací a musíme tak očekávat, že se již některé nepřesnosti „viditelně“ projeví, např. nepřesná počáteční výchylka  $x(0) - x_e \cong 1,1 \text{ cm}$  namísto  $1,0 \text{ cm}$ . Chceme však raději názorně ukázat grafy všech funkcí na takovém příkladu, aby se nelinearita co nejdříve projevila.

Zaměříme se především na závislost výchylky na čase, viz obr. 2.27 vlevo. Vidíme, že podle očekávání dominuje člen  $A_1 \cos(\Omega t)$  popisující kmitání se základní úhlovou frekvencí  $\Omega$ , viz modrá krátce čárkovaná křivka. Člen s druhou harmonickou frekvencí  $2\Omega$  (zelená čárkovaná křivka) má podstatně menší amplitudu a tudíž „o něco slaběji“ ovlivňuje výslednou funkci  $x(t)$ .

Úhlová frekvence anharmonických kmitů je rovna úhlové frekvenci  $\Omega$  harmonických kmitů, a tudíž i perioda zůstala nezměněna.

Konstantní člen  $a_0 = \alpha A_1^2 / (2\Omega^2)$  zobrazený hnědou čerchovanou čarou vyjadřuje setrvalé vychýlení kmitů směrem ke kladným hodnotám. Budeme-li zkoumat funkční předpis (2.245) pro výchylku  $x(t)$  zjistíme, že druhý a třetí člen kmitají okolo nuly, proto střední hodnota výchylek z rovnovážné polohy  $x - x_e$  je dána právě tímto konstantním členem. Platí tedy

$$\langle x - x_e \rangle = \frac{\alpha(x_0 - x_e)^2}{2\Omega^2}, \quad (2.247)$$

jak je naznačeno v obr. 2.27 vlevo. Tento závěr slouží např. pro vysvětlení teplotní roztažnosti pevných látek.

## Mechanická energie

Průběh výchylek z rovnovážné polohy  $x(t) - x_e$  lépe vysvětlíme, zaměříme-li se na mechanickou energii  $E$  oscilátoru, kterou nyní máme ve tvaru

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x_e) + \frac{1}{2}k(x - x_e)^2 - \frac{1}{3}m\alpha(x - x_e)^3. \quad (2.248)$$

Protože nepůsobí odporová síla, mechanická energie  $E$  se zachovává. Pokud však dosadíme do tohoto předpisu funkci  $x(t)$  z (2.245) a  $\dot{x}(t)$  z (2.246), zjistíme, že „mírně“ kolísá, jak vidíme na obr. 2.28 vlevo. To je důsledkem aproximací při hledání řešení pohybové rovnice (2.238).

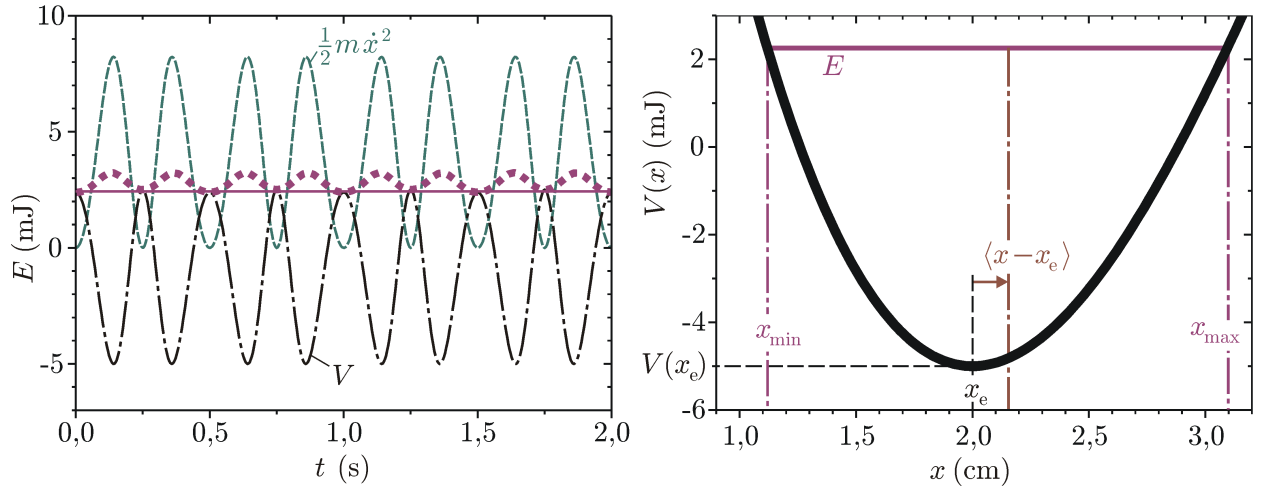
Vzhledem k tomu, že kinetická energie  $\frac{1}{2}m\dot{x}^2$  ve výrazu (2.248) nemůže být záporná, pohyb tělesa  $m$  může probíhat pouze v takových polohách, kde  $E \geq V(x)$ . To ovšem znamená, že pro krajní polohy  $x_{\min}$  a  $x_{\max}$  platí:

$$E = V(x_{\min}) = V(x_{\max}), \quad (2.249)$$

jak je naznačeno na obr. 2.28 vpravo.

Tím můžeme vysvětlit charakteristický průběh kmitů  $x(t) - x_e$  okolo rovnovážné polohy: V důsledku menší strmosti potenciální energie  $V(x)$  vpravo od rovnovážné polohy  $x_e$  zde těleso „prodlévá déle“ než vlevo od rovnovážné polohy. Tato skutečnost způsobuje, že horní oblouky grafu  $x(t)$  na obr. 2.27 vlevo jsou v kladných hodnotách  $x(t) - x_e$  širší než dolní oblouky. Posunutí střední hodnoty polohy z rovnovážné polohy o  $\langle x - x_e \rangle$  je též důsledkem asymetrického tvaru grafu  $V(x)$ .

Protože vratná síla  $F^{\text{vrat}}(x)$  je rovna záporně vzaté derivaci  $V$  podle  $x$ , menší strmost  $V(x)$  vpravo od rovnovážné polohy  $x_e$  zde znamená menší velikost vratné síly, a tudíž těleso  $m$  se „vrací pomaleji“. Říkáme, že vratná síla je v této oblasti *měkknoucí*. Naopak ve stejné vzdálenosti vlevo od rovnovážné polohy je velikost vratné síly větší, má *tvrdnoucí* charakter, a proto těleso se naopak „vrací rychleji“. Pomalejší návrat tělesa  $m$  v důsledku měkknoucí síly na jedné straně spolu s jeho rychlejším návratem v důsledku tvrdnoucí síly na druhé straně



Obrázek 2.28: Vlevo: Časový průběh mechanické energie (fialová tečkovaná křivka) podle (2.248), kinetické energie (zelená čárkovaná křivka) a potenciální energie (černá čerchovaná křivka). Vlivem použitých aproximací mechanická energie kolísá, ač by měla být konstantní, jak ukazuje tenká plná fialová čára. Vpravo: Pohyb tělesa  $m$  nastává v polohách, kde  $E \geq V(x)$ , tj. mezi body  $x_{\min}$  a  $x_{\max}$  danými vztahy (2.249). Asymetrický tvar grafu  $V(x)$  způsobuje posunutí střední hodnoty polohy z rovnovážné polohy o  $\langle x - x_e \rangle$ . Parametry jsou nastaveny stejně jako na obr. 2.26 a 2.27, tj.  $x_e = 2$  cm,  $V(x_e) = -5$  mJ,  $m = 1$  kg,  $\Omega = 4\pi$  s $^{-1} \Rightarrow k = m\Omega^2 = 16\pi^2$  kg s $^{-1}$ ,  $\alpha = 50$  cm $^{-1}$  s $^{-2}$  a  $x_0 - x_e = 1$  cm.

způsobí, že se nezmění úhlová frekvence kmitů anharmonického oscilátoru, tj.  $\Omega_{\text{an}} = \Omega$ , jak jsme zjistili v (2.241).

Měknoucí charakter vratné síly pro  $x > x_e$  a její tvrdnoucí charakter pro  $x < x_e$  lze přímo vypočítat již v grafu  $F^{\text{vrat}}(x)$  na obr. 2.26 vpravo.

### 2.6.3 Vratná síla s kubickým členem

Nyní se zabýváme případem, kdy  $\alpha = 0$  a  $\beta \neq 0$ , tj. vztahy (2.221) a (2.222) vyjdou takto:

$$V(x) = V(x_e) + \frac{1}{2}k(x - x_e)^2 + \frac{1}{4}m\beta(x - x_e)^4, \quad (2.250)$$

$$F^{\text{vrat}}(x) = -k(x - x_e) - m\beta(x - x_e)^3. \quad (2.251)$$

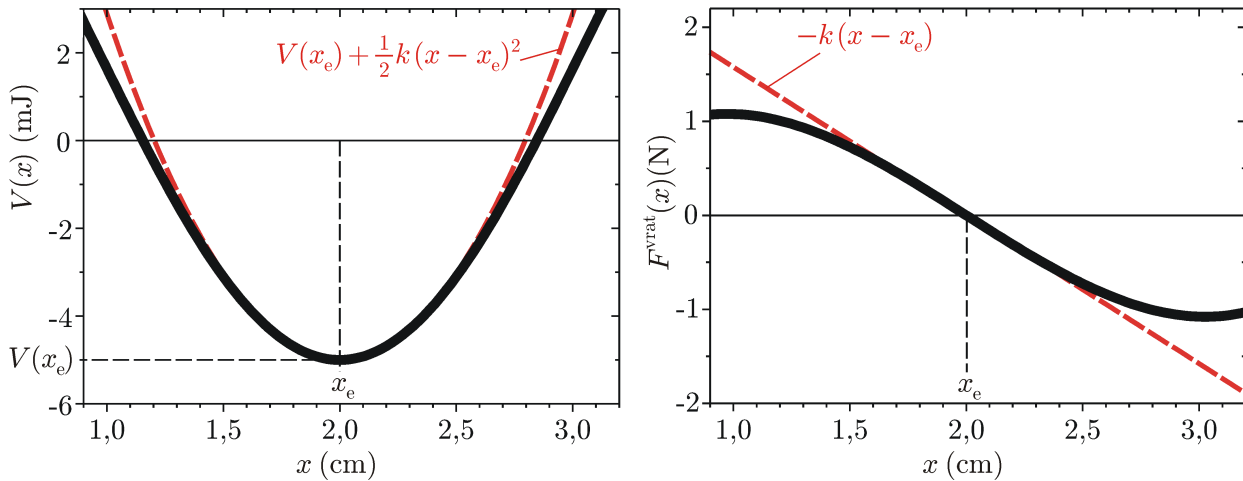
Příklady grafů takové potenciální energie  $V(x)$  a vratné síly  $F^{\text{vrat}}(x)$  s kubickým členem, jsou na obr. 2.29.

Pohybovou rovnici (2.223) pak nalezneme ve tvaru

$$\ddot{x} + \Omega^2(x - x_e) + \beta(x - x_e)^3 = 0. \quad (2.252)$$

Budeme postupovat obdobně jako v předchozím odstavci. Opět dosadíme předpokládané řešení (2.231) spolu s jeho druhou derivací (2.234) do této rovnice a tím dostáváme

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-\Omega_{\text{an}}^2 n^2) A_n \cos(n\Omega_{\text{an}} t) + \Omega^2 a_0 + \Omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega_{\text{an}} t) + \beta \left[ a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega_{\text{an}} t) \right]^3 = 0.$$



Obrázek 2.29: Průběh potenciální energie  $V(x)$  podle (2.250) (vlevo) a vratné síly  $F^{\text{vrat}}(x)$  (vpravo) podle (2.251). Členy odpovídající případu (lineárního) harmonického oscilátoru jsou znázorněny červenou čárkovanou křivkou. Platí:  $x_e = 2$  cm,  $V(x_e) = -5$  mJ,  $m = 1$  kg,  $\Omega = 4\pi \text{ s}^{-1} \Rightarrow k = m\Omega^2 = 16\pi^2 \text{ kg s}^{-1}$  a  $\beta = -50 \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-2}$ .

První dvě sumy zase vyjádříme pomocí jedné sumy a též i roznásobíme třetí mocninu hranaté závorky:

$$\begin{aligned} & \Omega^2 a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\Omega^2 - \Omega_{\text{an}}^2 n^2) A_n \cos(n\Omega_{\text{an}} t) + \beta a_0^3 + 3\beta a_0^2 \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega_{\text{an}} t) + \\ & + 3\beta a_0 \left[ \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega_{\text{an}} t) \right]^2 + \beta \left[ \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega_{\text{an}} t) \right]^3 = 0. \end{aligned} \quad (2.253)$$

Konstanty  $\beta$  a  $a_0$  stále považujeme za „malé“ veličiny, a proto druhý a třetí člen v prvním řádku a též i první člen v druhém řádku obsahující jejich součin opět zanedbáme jako veličiny „ještě menší“ než „malé“. Roznásobíme-li dále ještě třetí mocninu sumy v hranaté závorce, můžeme psát

$$\begin{aligned} & \Omega^2 a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\Omega^2 - \Omega_{\text{an}}^2 n^2) A_n \cos(n\Omega_{\text{an}} t) + \\ & + \beta \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} A_n A_m A_l \cos(n\Omega_{\text{an}} t) \cos(m\Omega_{\text{an}} t) \cos(l\Omega_{\text{an}} t) = 0. \end{aligned}$$

V dalším kroku využijeme goniometrického vzorce

$$\cos \gamma \cos \delta \cos \psi = \frac{1}{4} [\cos(\gamma + \delta + \psi) + \cos(\gamma - \delta + \psi) + \cos(\gamma + \delta - \psi) + \cos(\gamma - \delta - \psi)],$$

pomocí něhož dostáváme

$$\begin{aligned} & \Omega^2 a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\Omega^2 - \Omega_{\text{an}}^2 n^2) A_n \cos(n\Omega_{\text{an}} t) + \\ & + \frac{1}{4} \beta \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} A_n A_m A_l \{ \cos[(n + m + l)\Omega_{\text{an}} t] + \cos[(n - m + l)\Omega_{\text{an}} t] + \\ & + \cos[(n + m - l)\Omega_{\text{an}} t] + \cos[(n - m - l)\Omega_{\text{an}} t] \} = 0. \end{aligned} \quad (2.254)$$

Podle (2.235) jsou  $|A_2|, |A_3|, |A_4|, \dots$  podstatně „menší“ ve srovnání s  $|A_1|$ , a proto platí

$$|A_1^3| \gg |A_n A_m A_l|, \quad (n, m = 1, 2, 3, \dots), \quad (l = 2, 3, 4, \dots).$$

V trojitě sumě sumě v rovnici (2.254) tedy zanedbáme všechny sčítance, které představují „ještě menší“ veličiny. To znamená, že z nich zachováme pouze první s indexy  $n = m = l = 1$ :

$$\Omega^2 a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\Omega^2 - \Omega_{\text{an}}^2 n^2) A_n \cos(n\Omega_{\text{an}} t) + \frac{1}{4} \beta A_1^3 [\cos(3\Omega_{\text{an}} t) + 3\cos(\Omega_{\text{an}} t)] = 0.$$

Z poslední sumy vypíšeme první tři členy a vše dáme k sobě:

$$\begin{aligned} & \Omega^2 a_0 + (\Omega^2 - \Omega_{\text{an}}^2 + \frac{3}{4} \beta A_1^2) A_1 \cos(\Omega_{\text{an}} t) + (\Omega^2 - 4\Omega_{\text{an}}^2) A_2 \cos(2\Omega_{\text{an}} t) + \\ & + (\Omega^2 A_3 - 9\Omega_{\text{an}}^2 A_3 + \frac{1}{4} \beta A_1^3) \cos(3\Omega_{\text{an}} t) + \sum_{n=4}^{\infty} (\Omega^2 - \Omega_{\text{an}}^2 n^2) A_n \cos(n\Omega_{\text{an}} t) = 0. \end{aligned}$$

Aby se levá strana této rovnice vždy rovnala nule, musí platit následující vztahy:

$$\begin{aligned} a_0 = 0, \quad \Omega_{\text{an}}^2 = \Omega^2 + \frac{3}{4} \beta A_1^2, \quad A_3 = \frac{\beta A_1^3}{4(9\Omega_{\text{an}}^2 - \Omega^2)} = \frac{\beta A_1^3}{32\Omega^2 + 27\beta A_1^2}, \\ A_2 = A_4 = A_5 = \dots = 0. \end{aligned} \quad (2.255)$$

Podmínka (2.224) vpravo říká, že oscilátor je „slabě“ anharmonický, a proto možné hodnoty amplitudy  $A_1$  jsou omezeny relací

$$\frac{|\beta| A_1^2}{\Omega^2} \ll 1. \quad (2.256)$$

Jejím užitím můžeme úhlovou frekvenci  $\Omega_{\text{an}}$  „slabě“ anharmonických kmitů vyjádřit v přibližném tvaru<sup>12</sup>

$$\Omega_{\text{an}} = \sqrt{\Omega^2 + \frac{3}{4} \beta A_1^2} = \Omega \sqrt{1 + \frac{3\beta A_1^2}{4\Omega^2}} \cong \Omega \left( 1 + \frac{3\beta A_1^2}{8\Omega^2} \right) = \Omega + \frac{3\beta A_1^2}{8\Omega}. \quad (2.258)$$

Užitím podmínky (2.256) dále můžeme aproximovat amplitudu  $A_3$  výrazem

$$A_3 \cong \frac{\beta A_1^3}{32\Omega^2}. \quad (2.259)$$

Řešení (2.231) tedy tentokrát vychází následovně:

$$x(t) = x_e + A_1 \cos(\Omega_{\text{an}} t) + \frac{\beta A_1^3}{32\Omega^2} \cos(3\Omega_{\text{an}} t). \quad (2.260)$$

Člen  $A_1 \cos(\Omega_{\text{an}} t)$  popisuje základní kmit s úhlovou frekvencí  $\Omega_{\text{an}}$ , která se podle (2.258) nyní liší od vlastní úhlové frekvence  $\Omega$  harmonického oscilátoru. Třetí harmonický člen kmitající s úhlovou frekvencí  $3\Omega_{\text{an}}$  je důsledkem nelinearity vratné síly a vymizí, položíme-li  $\beta = 0$ . Amplituda  $A_1$  je opět integrační konstantou a určíme ji pomocí (2.230):

$$A_1 + \frac{\beta A_1^3}{32\Omega^2} = x_0 - x_e \quad \Rightarrow \quad \frac{\beta A_1^3}{32\Omega^2} + A_1 - x_0 + x_e = 0.$$

<sup>12</sup>Bereme v úvahu pouze první dva členy Taylorova rozvoje funkce  $f(s) = \sqrt{1+s}$  okolo bodu  $s = 0$ :

$$f(s) = \sqrt{1+s} = 1 + \frac{1}{2}s - \frac{1}{8}s^2 + \frac{3}{48}s^3 - \dots \quad (2.257)$$

Kubický člen můžeme s ohledem na (2.256) zanedbat, a tedy

$$A_1 \cong x_0 - x_e. \quad (2.261)$$

Pokud vratná síla (2.222) obsahuje pouze lineární a kubický člen, kmity  $x(t)$  „slabě“ anharmonického oscilátoru splňující počáteční podmínky (2.230) jsou popsány takto:

$$x(t) = x_e + (x_0 - x_e) \cos(\Omega_{\text{an}} t) + \frac{\beta(x_0 - x_e)^3}{32\Omega^2} \cos(3\Omega_{\text{an}} t), \quad (2.262)$$

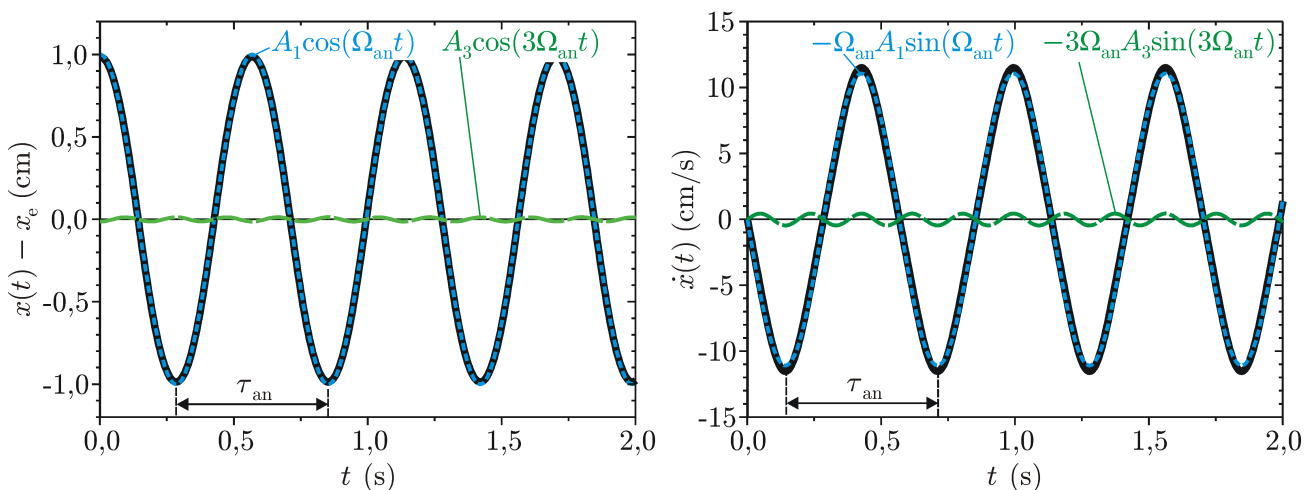
kde úhlovou frekvenci  $\Omega_{\text{an}}$  anharmonických kmitů udává vztah (2.258):

$$\Omega_{\text{an}} = \Omega + \frac{3\beta(x_0 - x_e)^2}{8\Omega}. \quad (2.263)$$

Okamžitá rychlost tělesa  $m$  potom bude následující:

$$\dot{x}(t) = -\Omega_{\text{an}}(x_0 - x_e) \sin(\Omega_{\text{an}} t) + \frac{3\beta\Omega_{\text{an}}(x_0 - x_e)^3}{32\Omega} \sin(3\Omega_{\text{an}} t). \quad (2.264)$$

Ukázky grafů funkcí  $x(t)$  a  $\dot{x}(t)$  včetně grafů jednotlivých členů jsou na obr. 2.30. Hodnoty veličin charakterizujících slabě anharmonický oscilátor byly zvoleny následovně:  $\Omega = 4\pi \text{ s}^{-1}$  a  $\beta = -50 \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-2}$  a dále  $A_1 = x_0 - x_e = 1 \text{ cm}$ . Levá strana podmínky (2.256) tedy vychází  $|\beta|A_1^2/\Omega^2 \cong 0,32$ . Opět jsme hodnotu  $A_1$  nastavili až za mez platnosti aproximací, abychom lépe ukázali vliv anharmoničnosti síly.



Obrázek 2.30: Výchylka a rychlost slabě anharmonického oscilátoru s vratnou silou (2.222) obsahující pouze lineární a kubický člen. Platí:  $\Omega = 4\pi \text{ s}^{-1}$ ,  $\beta = -50 \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-2}$ ,  $x_0 - x_e = 1 \text{ cm}$ . Odtud podle (2.263)  $\Omega_{\text{an}} \cong \Omega - 1,49 \text{ s}^{-1}$  a tudíž perioda anharmonických kmitů vychází  $\tau_{\text{an}} \equiv 2\pi/\Omega_{\text{an}} \cong 0,57 \text{ s} > 2\pi/\Omega$ . Vlevo: Graf  $x(t) - x_e$  podle (2.262) s barevně vyznačenými jednotlivými členy. Vpravo: Graf  $\dot{x}(t)$  podle (2.264) opět s vyznačenými oběma členy.

Porovnejme tento výsledek s případem anharmonické síly s kvadratickým členem, viz obr. 2.27: Podle očekávání opět dominuje člen  $A_1 \cos(\Omega_{\text{an}} t)$ , ale kmity s třetí harmonickou frekvencí  $3\Omega_{\text{an}}$  (zelená čárkovaná křivka) mají vzhledem k  $A_1$  ještě menší amplitudu. Dalším rozdílem je chybějící konstantní člen, z čehož vyplývá, že střední hodnota výchylek z rovnovážné polohy je nulová. A konečně třetí rozdíl spočívá v tom, že se liší úhlová frekvence anharmonických kmitů  $\Omega_{\text{an}}$  od k úhlové frekvence  $\Omega$  harmonických kmitů. Protože jsme zvolili záporné  $\beta$ , podle (2.263) platí  $\Omega_{\text{an}} < \Omega$ , a proto se perioda  $\tau_{\text{an}} \equiv 2\pi/\Omega_{\text{an}} \cong 0,57 \text{ s}$  anharmonických kmitů prodloužila ve srovnání s periodou  $\tau \equiv 2\pi/\Omega = 0,5 \text{ s}$  harmonických kmitů. Při volbě  $\beta > 0$  by tomu bylo pochopitelně naopak.



### Mechanická energie

Stejně jako v předchozím případě uvedené jevy lépe vysvětlíme pomocí mechanické energie. Protože působí pouze vratná síla, která je popsána potenciální energií a je tudíž silou konzervativní, mechanická energie

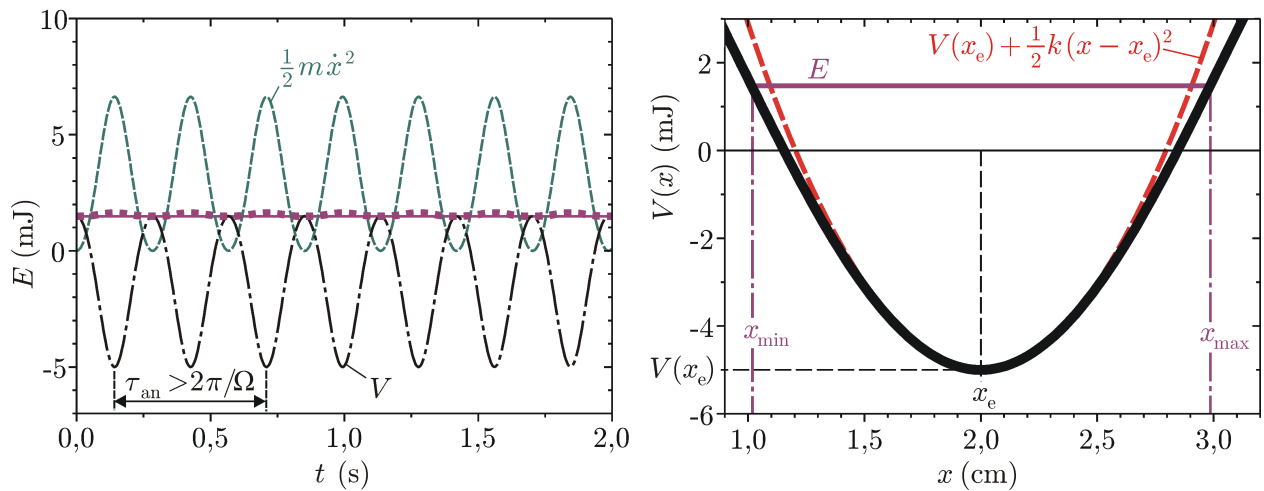
$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x_e) + \frac{1}{2}k(x - x_e)^2 + \frac{1}{4}m\beta(x - x_e)^4 \quad (2.265)$$

se zachovává. Po dosazení funkce  $x(t)$  z (2.262) a  $\dot{x}(t)$  z (2.264), opět vidíme, že v důsledku aproximací „mírně“ kolísá, jak je ukázáno na obr. 2.31 vlevo. Protože  $A_3/A_1$  je menší než  $A_2/A_1$ , kolísání není tak výrazné jako v předchozím případě vratné síly s kvadratickým členem na obr. 2.28 vlevo.

Opět provedeme úvahu nad nezápornou kinetickou energií  $\frac{1}{2}m\dot{x}^2$  ve výrazu (2.265): pohyb tělesa  $m$  může probíhat pouze mezi krajními polohami  $x_{\min}$  a  $x_{\max}$ , pro které platí

$$E = V(x_{\min}) = V(x_{\max}), \quad (2.266)$$

jak je naznačeno na obr. 2.31 vpravo.



Obrázek 2.31: Vlevo: Časový průběh mechanické energie (fialová tečkovaná křivka) podle (2.265), kinetické energie (zelená čárkovaná křivka) a potenciální energie (černá čerchovaná křivka). Vlivem použitých aproximací mechanická energie kolísá, ač by měla být konstantní, jak ukazuje tenká plná fialová čára. Vpravo: Pohyb tělesa  $m$  nastává v polohách, kde  $E \geq V(x)$ , tj. mezi body  $x_{\min}$  a  $x_{\max}$  danými vztahy (2.266). Tvar grafu  $V(x)$  je „širší“ než potenciální energie harmonického oscilátoru (červená čárkovaná křivka), což způsobuje prodloužení periody kmitů  $\tau_{\text{an}}$ , jak je naznačeno v grafu vlevo. Parametry jsou nastaveny stejně jako na obr. 2.29 a 2.30, tj.  $x_e = 2$  cm,  $V(x_e) = -5$  mJ,  $m = 1$  kg,  $\Omega = 4\pi$  s $^{-1}$   $\Rightarrow k = m\Omega^2 = 16\pi^2$  kg s $^{-1}$ ,  $\beta = -50$  cm $^{-2}$  s $^{-2}$  a  $x_0 - x_e = 1$  cm.

Charakteristický průběh kmitů  $x(t) - x_e$  okolo rovnovážné polohy tedy můžeme vysvětlit následovně: V důsledku menší strmosti potenciální energie  $V(x)$  na obou stranách od rovnovážné polohy  $x_e$  těleso v krajních polohách „prodlévá déle“ než v případě harmonického oscilátoru. Proto je perioda anharmonických kmitů  $\tau_{\text{an}} \equiv 2\pi/\Omega_{\text{an}}$  delší než perioda harmonických kmitů  $2\pi/\Omega$ , což si lze ověřit užitím vztahu (2.263), když dosadíme záporné  $\beta$ .

Takto lze například odhadnout přesnější úhlovou frekvenci kmitů matematického kyvadla, pokud ve výrazu (1.137) na str. 51 použijeme první dva členy Taylorova rozvoje funkce sinus:  $\sin \theta \cong \theta - \theta^3/6$ .

Vzhledem k symetrickému tvaru grafu  $V(x)$  probíhají anharmonické kmity přesně okolo rovnovážné polohy  $x_e$  a pro střední hodnotu výchylky z rovnovážné polohy tudíž platí  $\langle x - x_e \rangle = 0$  na rozdíl od předchozího případu vratné síly s kvadratickým členem, viz obr. 2.28 vpravo.

Vratná síla  $F^{\text{vrat}}(x)$  je na obou stranách od rovnovážné polohy nyní měknoucí, což odpovídá menší strmosti  $V(x)$ , které jsme si již všimli. Pokud bychom zvolili kladné  $\beta$ , síla by byla na obou stranách tvrdnoucí a tím by se perioda anharmonických kmitů  $\tau_{\text{an}}$  naopak snížila, neboť úhlová frekvence  $\Omega_{\text{an}}$  by byla vyšší, viz (2.263).

## 2.7 Spřažené kmity

Zatím jsme se zabývali mechanickou soustavou tvořenou jediným tělesem, na které působí vratná síla (např. lineární od pružiny) a popř. ještě tlumicí a budicí síla. Nyní budeme do mechanické soustavy zahrnovat  $N$  těles. Pro tento účel využijeme popisu jejího stavu pomocí kartézských souřadnic<sup>13</sup>  $x_i$ , kde  $i = 1, 2, \dots, M$ , přičemž  $M$  znamená počet stupňů volnosti mechanické soustavy. Tento pojem jsme nastínili při zavedení zobecněných souřadnic v odst. 1.5 na str. 19. Dostaneme tedy  $M$  pohybových rovnic, ve kterých bude vystupovat  $M$  hmotností  $m_i$ . Má-li některé těleso více než jeden stupeň volnosti a jeho poloha je tudíž popsána dvěma nebo třemi souřadnicemi  $x_i$ , příslušné  $m_i$  s indexy odpovídajícími těmto souřadnicím jsou rovny hmotnosti tohoto tělesa. Pokud je naopak pohyb všech těles pouze jednorozměrný, platí:  $M = N$ .

Uvažujeme pouze o vratných silách, tlumicí a budicí síly tudíž nepůsobí. Potom potenciální energie  $V$  celé soustavy

$$V \equiv V(x_1, x_2, \dots, x_M)$$

je samozřejmě obecně funkcí všech souřadnic. Předpokládáme, že mechanická soustava má svůj rovnovážný stav daný určitými hodnotami  $x_{e,1}, x_{e,2}, \dots, x_{e,M}$ . Zvolme souřadnice tak, aby tento rovnovážný stav nastal tehdy, když jsou všechny jejich hodnoty nulové. Znamená to, že platí

$$(x_{e,1}, x_{e,2}, \dots, x_{e,M}) = (0, 0, \dots, 0). \quad (2.267)$$

Vztah (2.3) na str. 137 vyjadřuje podmínku statické rovnováhy mechanické soustavy a nyní jej tedy můžeme zapsat ve tvaru

$$\left. \frac{\partial V}{\partial x_i} \right|_{(x_1, x_2, \dots, x_M) = (0, 0, \dots, 0)} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, M). \quad (2.268)$$

Dále již víme, že aby nastaly kmity, rovnovážná poloha musí být minimem funkce  $V(x_i)$ , což říká podmínka (2.4) na téže straně:

$$\left. \frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2} \right|_{(x_1, x_2, \dots, x_M) = (0, 0, \dots, 0)} > 0 \quad (i = 1, 2, \dots, M). \quad (2.269)$$

Mechanické soustavě s takovou potenciální energií budeme říkat *kmitající mechanická soustava*.

Při hledání časového vývoje stavu konkrétních kmitajících mechanických soustav je vhodné sledovat kroky, které popíšeme prozatím v obecnosti.

<sup>13</sup>Na samém začátku této kapitoly jsme používali zobecněné souřadnice  $q_j$ , viz odst. 2.1 na str. 137. Pro následující obecné úvahy o spřažených kmitěch však budeme používat kartézské souřadnice. Obdobné postupy lze samozřejmě činit i se zobecněnými souřadnicemi, avšak jsou méně přehledné.

### Tvar potenciální energie

O mechanické soustavě předpokládáme, že tělesa budou navzájem na sebe působit lineárními vratnými silami a dále na ně mohou ještě působit i lineární vratné síly od těles mimo tuto mechanickou soustavu. Všechny uvedené vlastnosti má potenciální energie v nejobecnějším tvaru<sup>14</sup>

$$V(x_1, x_2, \dots, x_M) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \frac{1}{2} C_{ij} x_i x_j \geq 0, \quad (2.270)$$

kde  $C_{ij}$  jsou konstanty charakterizující jednotlivé tuhosti vratných sil, přičemž zřejmě nezáleží na pořadí indexů  $i$  a  $j$ . Platí tedy, že

$$C_{ij} = C_{ji} \quad (i, j = 1, 2, \dots, M) \quad (2.271)$$

a znamená to, že  $C_{ij}$  jsou složkami symetrické matice. Z potenciální energie (2.270) postupně získáme jednotlivé složky vratných sil pomocí záporně vzatých parciálních derivací podle všech kartézských souřadnic  $x_i$ , viz (1.23) na str. 17:

$$F_i^{\text{vrat}} \equiv -\frac{\partial V}{\partial x_i} = -\sum_{j=1}^M C_{ij} x_j \quad (i = 1, 2, \dots, M). \quad (2.272)$$

### Sestavení pohybových rovnic

Pohybové rovnice libovolné mechanické soustavy, jejíž pohybový stav můžeme popsat pomocí kartézských souřadnic, jsme napsali ve tvaru (1.24) na str. 17. Obdobně pro kmitající mechanické soustavy máme

$$m_i \ddot{x}_i = F_i^{\text{vrat}} = -\sum_{j=1}^M C_{ij} x_j \quad (i = 1, 2, \dots, M). \quad (2.273)$$

Vidíme, že mají obvyklý tvar Newtonových rovnic: nalevo je součin hmotnosti  $m_i$  daného tělesa a složky  $\ddot{x}_i$  jeho zrychlení, na pravé straně se objevila příslušná vratná síla  $F_i^{\text{vrat}}$  podle (2.272).

### Hledání charakteristických frekvencí

Pohybové rovnice (2.273) tvoří soustavu  $M$  obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu, jejíž řešeními jsou funkce  $x_i(t)$  popisující časový vývoj všech souřadnic. Protože každá z pohybových rovnic obsahuje obecně všechna  $x_i$ , při hledání řešení si nevystačíme s kroky, které jsme zatím v této kapitole používali. Budeme se však inspirovat postupem, který jsme použili v příkladu 1.8.5 „Oscilátor s kyvadlem“, kde jsme na str. 66 představili metodu hledání vlastních kmitů. Nejprve se tedy budeme zabývat případy, kdy všechny souřadnice  $x_i(t)$  kmitají se stejnou úhlovou frekvencí  $\Omega$  a se stejnou fází, neboli předpokládáme, že

$$x_i(t) = a_i \exp(i\Omega t) \quad (i = 1, 2, \dots, M), \quad (2.274)$$

kde  $a_i$  jsou komplexní amplitudy jednotlivých kmitů. Tyto amplitudy mohou mít různé velikosti, avšak shodnou fází  $\varphi$ , neboli platí

$$a_i = |a_i| \exp(i\varphi) \quad (i = 1, 2, \dots, M). \quad (2.275)$$

<sup>14</sup>Jde opět o kvadratickou formu, jak jsme zmínili v souvislosti s úpravou kinetické energie  $T$ , viz vztah (1.116) na str. 44.

To znamená, že součin libovolné komplexně sdružené amplitudy  $a_i^*$  s libovolnou amplitudou  $a_j$  vyjde vždy reálný:

$$a_i^* a_j = |a_i| \exp(-i\varphi) |a_j| \exp(i\varphi) = |a_i| |a_j| \quad (i, j = 1, 2, \dots, M). \quad (2.276)$$

Úhlové frekvenci  $\Omega$  budeme říkat *charakteristická frekvence* a uvidíme, že každá kmitající mechanická soustava o  $M$  stupních volnosti jich má nejvýše  $M$ . Druhá derivace funkcí (2.274) dává

$$\ddot{x}_i = -\Omega^2 a_i \exp(i\Omega t) \quad (i = 1, 2, \dots, M). \quad (2.277)$$

Po dosazení (2.277) a (2.274) do pohybových rovnic (2.273) dostáváme

$$-m_i \Omega^2 a_i \exp(i\Omega t) = -\sum_{j=1}^M C_{ij} a_j \exp(i\Omega t) \quad (i = 1, 2, \dots, M),$$

odkud po převedení pravé strany nalevo a vytknutí  $\exp(i\Omega t)$

$$\left( -m_i \Omega^2 a_i + \sum_{j=1}^M C_{ij} a_j \right) \exp(i\Omega t) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, M).$$

Aby byly levé strany všech těchto rovnic rovny nule v každém časovém okamžiku, musí být závorky před exponenciálními funkcemi nulové. Dostáváme tedy soustavu  $M$  lineárních algebraických rovnic pro  $M$  neznámých amplitud  $a_i$

$$-m_i \Omega^2 a_i + \sum_{j=1}^M C_{ij} a_j = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, M). \quad (2.278)$$

Tuto soustavu nyní s ohledem na (2.271) napíšeme v následujícím maticovém tvaru:

$$\begin{bmatrix} -m_1 \Omega^2 + C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1M} \\ C_{12} & -m_2 \Omega^2 + C_{22} & \cdots & C_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1M} & C_{2M} & \cdots & -m_M \Omega^2 + C_{MM} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.279)$$

Vidíme, že jde o homogenní soustavu rovnic, neboť vektor pravých stran je nulovým vektorem a z kurzu lineární algebry víme, že má triviální řešení  $a_1 = a_2 = \cdots = a_M = 0$ . Takový výsledek zřejmě popisuje případ, kdy je mechanická soustava po celou dobu v klidu ve své rovnovážné poloze. Kmitající soustavu bude popisovat netriviální řešení, a proto je třeba zajistit, aby byly rovnice (2.279) lineárně závislé. Toho dosáhneme tak, že položíme determinant matice v (2.279) roven nule:

$$\det \begin{bmatrix} -m_1 \Omega^2 + C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1M} \\ C_{12} & -m_2 \Omega^2 + C_{22} & \cdots & C_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1M} & C_{2M} & \cdots & -m_M \Omega^2 + C_{MM} \end{bmatrix} = 0. \quad (2.280)$$

Poněvadž konstanty  $m_i$  a  $C_{ij}$  jsou známy, tato rovnice představuje polynomickou rovnici  $M$ -tého řádu a hodnoty neznámé  $\Omega^2$  jsou jejími kořeny, kterých je zřejmě  $M$ .<sup>15</sup> Budeme je proto

<sup>15</sup>Samozřejmě existují mechanické soustavy, jejichž pohybové rovnice vedou na polynomickou rovnici s několiknásobnými kořeny. V takových případech dochází k redukcii počtu různých charakteristických frekvencí, ale těmi se zabývat nebudeme.

rozlišovat indexem  $n = 1, 2, \dots, M$ . Do soustavy rovnic (2.278) potom postupně dosadíme za  $\Omega$  jednotlivé nalezené charakteristické frekvence  $\Omega_n$  a získáváme tak  $M$  soustav rovnic

$$-m_i \Omega_n^2 a_{i,n} + \sum_{j=1}^M C_{ij} a_{j,n} = 0 \quad (i, n = 1, 2, \dots, M) \quad (2.281)$$

pro  $M$  souborů amplitud  $a_{i,n}$  přináležejících každé  $\Omega_n$ .

Vzhledem k tomu, že charakteristické frekvence jsou fyzikálními veličinami, všechny musejí být reálné. To dokážeme následujícím způsobem: Každou z rovnic (2.281) vynásobíme příslušnou komplexně sdruženou amplitudou  $a_{i,n}^*$ , všechny takto vzniklé rovnice sečteme přes všechna  $i$  a toto postupně uděláme pro všechna  $n$ . Tím dostáváme následující rovnice:

$$\sum_{i=1}^M \left( -a_{i,n}^* m_i \Omega_n^2 a_{i,n} + a_{i,n}^* \sum_{j=1}^M C_{ij} a_{j,n} \right) = 0 \quad (n = 1, 2, \dots, M).$$

Podle (2.276) platí  $a_{i,n}^* a_{j,n} = |a_{i,n}| |a_{j,n}|$  pro všechna  $i$  a  $j$ , můžeme tedy dále tyto rovnice upravit takto:

$$\sum_{i=1}^M m_i \Omega_n^2 |a_{i,n}|^2 = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M C_{ij} |a_{i,n}| |a_{j,n}| \quad (n = 1, 2, \dots, M).$$

Protože dané  $\Omega_n^2$  je pro všechna  $a_{i,l}$  společné, můžeme jej vytknout ze sumy na levé straně a rovnice dále přepsat do konečného tvaru:

$$\Omega_n^2 = \frac{\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M C_{ij} |a_{i,l}| |a_{j,l}|}{\sum_{i=1}^M m_i |a_{i,l}|^2} > 0 \quad (n = 1, 2, \dots, M).$$

Hmotnosti  $m_i$  jsou kladné, což znamená, že i jmenovatel je automaticky kladný. Potenciální energie  $V$  je vždy větší nebo rovna nule, viz (2.270), proto i čitatel není záporný.<sup>16</sup> Závěrem tedy můžeme říci, že všechna  $\Omega_n^2$  jsou reálná a nezáporná, a tudíž i samotné  $\Omega_n$  pokaždé vyjdou reálné.

Postup hledání charakteristických frekvencí kmitající mechanické soustavy jsme již nastínili v úloze 1.8.5 „Oscilátor s kyvadlem“ na str. 66. Tam jsme však museli pohybové rovnice nejdříve linearizovat, zatímco zde již z tvaru potenciální energie (2.270) automaticky plyne, že jsou pohybové rovnice lineární od samého začátku.

### Nalezení souboru amplitud

Pro každou z charakteristických frekvencí  $\Omega_n$  získáme příslušné soubory amplitud  $a_{i,l}$  řešením všech  $M$  soustav rovnic (2.281). Protože jsou tyto rovnice lineárně závislé, jejich řešení je nekonečně mnoho. Zvolíme proto některou z amplitud jako parametr, např.  $a_{n,l}$ , a zbylé dopočítáme. Znamená to, že pro dané  $l$  jsou všechny amplitudy jednoznačně určeny hodnotou vybrané amplitudy  $a_{n,l}$  a platí tedy

$$a_{i,n} = a_{i,n}(a_{n,l}) \quad (i, n = 1, 2, \dots, M).$$

<sup>16</sup>V lineární algebře bychom řekli, že čtvercová matice  $C_{ij}$  je *pozitivně definitní*.

Tento závěr je z fyzikálního hlediska velmi důležitý. Souborů amplitud  $a_{i,n}$  každé mechanické soustavy kmitající s konkrétní charakteristickou frekvencí  $\Omega_n$  je nekonečně mnoho, což je důsledek lineární závislosti rovnic (2.279). Je-li však určena jedna z nich, jsou jednoznačně dány i všechny ostatní.

Navíc, protože jsou rovnice (2.281) lineární, každá amplituda  $a_{i,n}$  závisí na vybrané amplitudě  $a_{l,n}$  přímo úměrně a tudíž bezrozměrné výrazy

$$\frac{a_{i,n}}{a_{l,n}} \quad (i, n = 1, 2, \dots, M)$$

jsou již jen reálnými funkcemi hmotností  $m_i$  a konstant tuhosti  $C_{ij}$ , nikoli ostatních amplitud. Zvolená amplituda  $a_{l,n}$  tedy nemá žádné výsadní postavení, neboť za parametr si můžeme zvolit kteroukoli jinou. Abychom zdůraznili „rovnocennost“ všech amplitud, budeme je nadále zapisovat ve shodě s (2.275) následujícím způsobem:

$$a_{i,n} = |a_{i,n}| \exp(i\varphi_n) = A_n f_{i,n} \exp(i\varphi_n) \quad (i, n = 1, 2, \dots, M), \quad (2.282)$$

kde  $A_n$  je zatím neznámá reálná „amplituda“ společná všem  $a_{i,n}$  pro dané  $n$ . Koeficienty  $f_{i,n}$  představují zatím neznámé bezrozměrné funkce všech  $m_i$  a  $C_{ij}$  a platí pro ně

$$\sum_{i=1}^M f_{i,n}^2 = 1 \quad (n = 1, 2, \dots, M), \quad (2.283)$$

neboli vektory  $(f_{1,n}, f_{2,n}, \dots, f_{M,n})$  jsou jednotkové pro všechna  $n$ . Soustavy rovnic (2.278) nyní přepíšeme takto:

$$\sum_{j=1}^M \frac{C_{ij}}{m_i} a_{j,n} = \Omega_n^2 a_{i,n} \quad (i, n = 1, 2, \dots, M).$$

Dosadíme-li do nich ze vztahů (2.282) za amplitudy  $a_{i,n}$ , po vykrácení  $A_n \exp(i\varphi_n)$  dostáváme

$$\sum_{j=1}^M \frac{C_{ij}}{m_i} f_{j,n} = \Omega_n^2 f_{i,n} \quad (i, n = 1, 2, \dots, M).$$

Pro přehlednost ještě můžeme tento výsledek vyjádřit maticově:

$$\begin{bmatrix} C_{11}/m_1 & C_{12}/m_1 & \cdots & C_{1M}/m_1 \\ C_{12}/m_2 & C_{22}/m_2 & \cdots & C_{2M}/m_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1M}/m_M & C_{2M}/m_M & \cdots & C_{MM}/m_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{1,n} \\ f_{2,n} \\ \vdots \\ f_{M,n} \end{bmatrix} = \Omega_n^2 \begin{bmatrix} f_{1,n} \\ f_{2,n} \\ \vdots \\ f_{M,n} \end{bmatrix} \quad (n = 1, 2, \dots, M). \quad (2.284)$$

Řešením těchto soustav rovnic spolu s podmínkami (2.283) již jednoznačně získáváme všechny vektory  $(f_{1,n}, f_{2,n}, \dots, f_{M,n})$ <sup>17</sup>. Tím jsou též určeny ve vztazích (2.282) i všechny amplitudy  $a_{i,n} = A_n f_{i,n} \exp(i\varphi_n)$  až na „společné amplitudy“  $A_n$ , kterým se budeme nyní věnovat.

<sup>17</sup>V lineární algebře říkáme, že  $\Omega_n^2$  jsou *vlastní čísla* a vektory  $(f_{1,n}, f_{2,n}, \dots, f_{M,n})$  jsou *vlastní vektory* matice v (2.284).

### Vyjádření obecného řešení

Po určení koeficientů  $f_{i,n}$  přistoupíme k vyjádření obecného řešení soustavy pohybových rovnic (2.273), kterými jsou lineární kombinace funkcí (2.274) pro každé  $\Omega_n$ , neboli užitím (2.282)

$$x_i(t) = \sum_{n=1}^M a_{i,n} \exp(i\Omega_n t) = \sum_{n=1}^M A_n f_{i,n} \exp(i\Omega_n t + \varphi_n) \quad (i = 1, 2, \dots, M). \quad (2.285)$$

Jak víme ze závěru odst. 2.2.1 na str. 140, těmto funkcím nakonec přiřadíme reálné části jejich komplexního vyjádření, a tedy

$$x_i(t) = \sum_{n=1}^M A_n f_{i,n} \cos(\Omega_n t + \varphi_n) \quad (i = 1, 2, \dots, M). \quad (2.286)$$

Rychlosti každého z těles mechanické soustavy dostaneme časovou derivací těchto jejich poloh:

$$\dot{x}_i(t) = - \sum_{n=1}^M A_n f_{i,n} \Omega_n \sin(\Omega_n t + \varphi_n) \quad (i = 1, 2, \dots, M). \quad (2.287)$$

Vidíme, že zbývá určit  $M$  reálných amplitud  $A_n$  a  $M$  fází  $\varphi_n$ . Ty získáme z  $2M$  počátečních podmínek pro každé z těles mechanické soustavy:

$$x_i(0) = x_{i,0}, \quad \dot{x}_i(0) = v_{i,0} \quad (i = 1, 2, \dots, M). \quad (2.288)$$

### Normální souřadnice a mechanická energie

Zaměříme se nyní na funkce tvořící v rovnicích (2.286) obecné řešení  $x_i(t)$ . Napíšeme je však v tomto tvaru:

$$u_n(t) = A_n \sqrt{\mu_n} \cos(\Omega_n t + \varphi_n) \quad (n = 1, 2, \dots, M), \quad (2.289)$$

kde  $\mu_n$  jsou zatím neznámé kladné konstanty mající základní fyzikální jednotku kilogram. Důvod, proč jsme tyto funkce definovali zrovna takto, vyplyne později. Druhé derivace  $u_n(t)$  vyjdou

$$\ddot{u}_n = -\Omega_n^2 A_n \sqrt{\mu_n} \cos(\Omega_n t + \varphi_n) \quad (n = 1, 2, \dots, M)$$

a tím dostáváme soustavu rovnic

$$\ddot{u}_n = -\Omega_n^2 u_n \quad (n = 1, 2, \dots, M), \quad (2.290)$$

která je ekvivalentní původní soustavě pohybových rovnic (2.273). Nyní je však tato soustava separovaná, neboť každá z rovnic obsahuje vždy jen jednu příslušnou funkci  $u_n(t)$ . Těmto funkcím říkáme *normální souřadnice* a používáme je k vyjádření kmitů (2.285) mechanické soustavy takto:

$$x_i(t) = \sum_{n=1}^M \frac{f_{i,n}}{\sqrt{\mu_n}} u_n(t) \quad (i = 1, 2, \dots, M). \quad (2.291)$$

Jednou z výhod přechodu k normálním souřadnicím je snazší vyjádření celkové mechanické energie soustavy, která má v kartézských souřadnicích následující tvar:

$$E = \sum_{i=1}^M \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 + \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \frac{1}{2} C_{ij} x_i x_j.$$

Zde jednoduchá suma odpovídá celkové kinetické energii a dvojsuma celkové potenciální energii  $V$  mechanické soustavy, viz (2.270). Nejprve dosazením z (2.291) přepíšeme do normálních kmitů kinetickou energii:

$$\sum_{i=1}^M \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 = \sum_{i=1}^M \frac{1}{2} m_i \sum_{n=1}^M \frac{f_{i,n}}{\sqrt{\mu_n}} \dot{u}_n \sum_{l=1}^M \frac{f_{i,l}}{\sqrt{\mu_l}} \dot{u}_l = \sum_{n=1}^M \sum_{l=1}^M \frac{1}{2} \dot{u}_n \dot{u}_l \sum_{i=1}^M m_i \frac{f_{i,n} f_{i,l}}{\sqrt{\mu_n \mu_l}},$$

kde jsme zaměnili pořadí sumy s indexem  $i$  a sum s indexy  $n$  a  $l$ . Dále obdobně přepíšeme i potenciální energii:

$$\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \frac{1}{2} C_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \frac{1}{2} C_{ij} \sum_{n=1}^M \frac{f_{i,n}}{\sqrt{\mu_n}} u_n \sum_{l=1}^M \frac{f_{j,l}}{\sqrt{\mu_l}} u_l = \sum_{n=1}^M \sum_{l=1}^M \frac{1}{2} u_n u_l \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M C_{ij} \frac{f_{i,n} f_{j,l}}{\sqrt{\mu_n \mu_l}}.$$

Zvolíme-li konstanty  $\mu_n$  pro všechna  $n$  takové, aby platilo

$$\sum_{i=1}^M m_i \frac{f_{i,n} f_{i,l}}{\sqrt{\mu_n \mu_l}} = \begin{cases} 1, & \text{když } l = n, \\ 0, & \text{když } l \neq n \end{cases} \quad (2.292)$$

a zároveň

$$\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M C_{ij} \frac{f_{i,n} f_{j,l}}{\sqrt{\mu_n \mu_l}} = \begin{cases} \Omega_n^2, & \text{když } l = n, \\ 0, & \text{když } l \neq n, \end{cases} \quad (2.293)$$

celková mechanická energie soustavy potom vyjde ve tvaru

$$E = \sum_{n=1}^M \frac{1}{2} \dot{u}_n^2 + \sum_{n=1}^M \frac{1}{2} \Omega_n^2 u_n^2. \quad (2.294)$$

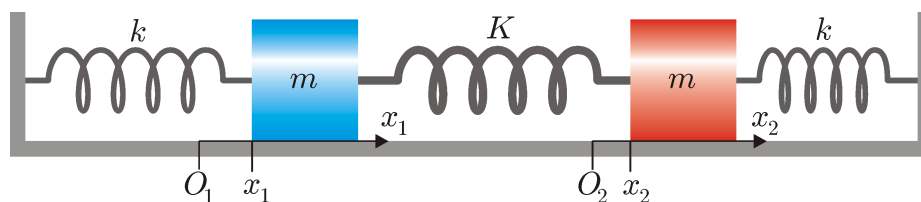
Vidíme, že tím by se nám podařilo potenciální energii (druhá suma) zbavit smíšených členů  $x_i x_j$  a přepsat ji do součtu separovaných příspěvků postupně obsahujících pouze kvadráty normálních souřadnic  $u_n$ . Takto zapsaná mechanická energie samozřejmě odpovídá i separovaným „pohybovým rovnicím“ (2.290) pro normální souřadnice.

Abychom lépe porozuměli obecným úvahám, jež jsme doposud vedli, ukážeme je na třech následujících názorných úlohách.

### 2.7.1 Symetrický řetízek dvou těles

Zabývejme se kmitající mechanickou soustavou s dvěma stupni volnosti, tj.  $M = 2$ , která je tvořena dvěma tělesy o stejných hmotnostech  $m$  navzájem spojenými pružinou o tuhosti  $k$ . Každé z těles je dále ještě připevněno k pružinám o stejných tuhostech  $k$ , jejichž druhé konce jsou vetknuty do protilehlých zdí. Osy všech tří pružin jsou rovnoběžné. U obou těles jde o jednorozměrný pohyb a proto za kartézské souřadnice  $x_1$  a  $x_2$  zvolíme polohy na osách, které jsou rovnoběžné s pružinami. Počátky obou os umístíme do bodů, ve kterých jsou všechny tři pružiny nezdeformované, tzn. rovnovážná poloha této mechanické soustavy je  $(x_{e,1}, x_{e,2}) = (0, 0)$ , jak požaduje podmínka (2.267). Popsaná geometrie zadání úlohy včetně kartézských souřadnic je ukázána na obr. 2.32.





Obrázek 2.32: Symetrický řetízek dvou těles, jejichž polohy jsou popsány kartézskými souřadnicemi  $x_1$  a  $x_2$ .

### Tvar potenciální energie

Potenciální energie (2.270) závisí na tom, jaká je okamžitá změna tvaru jednotlivých pružin. Deformace prostřední pružiny je zřejmě určena rozdílem obou souřadnic  $x_1$  a  $x_2$  a deformace pružin krajních již udávají přímo souřadnice. Není obtížné se přesvědčit o tom, že potenciální energii této soustavy nalezneme ve tvaru

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}K(x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}kx_2^2. \quad (2.295)$$

Rozepíšeme-li druhou mocninu závorky a upravíme-li výsledek, můžeme  $V$  zapsat takto:

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(K + k)x_1^2 - Kx_1x_2 + \frac{1}{2}(K + k)x_2^2.$$

Porovnáním tohoto výrazu s (2.270) zjišťujeme, že platí

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K + k & -K \\ -K & K + k \end{bmatrix}.$$

Protože  $C_{21} = C_{12}$ , matice  $C_{ij}$  je vskutku symetrická, jak jsme si již dříve všimli, viz (2.271).

### Sestavení pohybových rovnic

Pohybové rovnice (2.273) zřejmě dostáváme v podobě následující soustavy dvou obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu:

$$m\ddot{x}_1 = -(K + k)x_1 + Kx_2, \quad m\ddot{x}_2 = Kx_1 - (K + k)x_2. \quad (2.296)$$

Vidíme, že jsou provázané, neboť každá z nich obsahuje zároveň obě neznámé funkce  $x_1(t)$  a  $x_2(t)$  představující jejich řešení.

### Hledání charakteristických frekvencí

Homogenní soustava rovnic (2.279) tedy v tomto případě nabude tvaru

$$\begin{bmatrix} -m\Omega^2 + K + k & -K \\ -K & -m\Omega^2 + K + k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.297)$$

Aby měla netriviální řešení, musí být obě rovnice lineárně závislé, a tudíž determinant matice musí být nulový, jak říká vztah (2.280). V tomto případě

$$\det \begin{bmatrix} -m\Omega^2 + K + k & -K \\ -K & -m\Omega^2 + K + k \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad (-m\Omega^2 + K + k)^2 - K^2 = 0.$$

Po úpravě zjišťujeme, že jsme obdrželi následující kvadratickou rovnici pro  $\Omega^2$ :

$$\Omega^4 - \frac{2(K+k)}{m}\Omega^2 + \frac{k^2 + 2kK}{m^2} = 0,$$

která má tato dvě řešení:

$$\begin{aligned}\Omega_1^2 &= \frac{K+k}{m} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4(K+k)^2}{m^2} - 4\frac{k^2 + 2kK}{m^2}} = \frac{k}{m}, \\ \Omega_2^2 &= \frac{K+k}{m} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4(K+k)^2}{m^2} - 4\frac{k^2 + 2kK}{m^2}} = \frac{2K+k}{m}.\end{aligned}$$

Obě charakteristické frekvence jsou tedy vskutku reálné, neboť tuhosti pružin i hmotnost těles jsou kladné:

$$\Omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \Omega_2 = \sqrt{\frac{2K+k}{m}}. \quad (2.298)$$

### Nalezení souboru amplitud

Pro charakteristickou frekvenci  $\Omega_1$  existuje soubor amplitud  $a_{1,1}$  a  $a_{2,1}$  kmitů obou těles a podobně i pro charakteristickou frekvenci  $\Omega_2$  existuje soubor amplitud  $a_{1,2}$  a  $a_{2,2}$ .

Začneme s charakteristickou frekvencí  $\Omega_1 = \sqrt{k/m}$ , neboli  $n = 1$ . Soustava rovnic (2.284) bude vypadat takto:

$$\begin{bmatrix} (K+k)/m & -K/m \\ -K/m & (K+k)/m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{1,1} \\ f_{2,1} \end{bmatrix} = \frac{k}{m} \begin{bmatrix} f_{1,1} \\ f_{2,1} \end{bmatrix} \quad (2.299)$$

a podmínka podle (2.283) bude následující:

$$f_{1,1}^2 + f_{2,1}^2 = 1. \quad (2.300)$$

Lze se přesvědčit o tom, že soustava (2.299) spolu s touto podmínkou má řešení

$$f_{1,1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cong 0,71, \quad f_{2,1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cong 0,71. \quad (2.301)$$

Pro charakteristickou frekvenci  $\Omega_2 = \sqrt{(2K+k)/m}$  dostáváme podle (2.284) pro  $n = 2$  tuto soustavu rovnic:

$$\begin{bmatrix} (K+k)/m & -K/m \\ -K/m & (K+k)/m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{1,2} \\ f_{2,2} \end{bmatrix} = \frac{2K+k}{m} \begin{bmatrix} f_{1,2} \\ f_{2,2} \end{bmatrix}. \quad (2.302)$$

Ta spolu s podmínkou

$$f_{1,2}^2 + f_{2,2}^2 = 1 \quad (2.303)$$

sestavenou opět podle (2.283) dává toto řešení:

$$f_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cong 0,71, \quad f_{2,2} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cong -0,71. \quad (2.304)$$

Všimáme si, že pro tuto kmitající mechanickou soustavu speciálně platí

$$f_{1,1}f_{1,2} + f_{2,1}f_{2,2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0. \quad (2.305)$$

To znamená, že skalární součin vektorů  $(f_{1,1}, f_{2,1})$  a  $(f_{1,2}, f_{2,2})$  je roven nule, neboli tyto vektory jsou *ortogonální*.<sup>18</sup>

Komplexní amplitudy  $a_{1,1}$ ,  $a_{2,1}$ ,  $a_{1,2}$  a  $a_{2,2}$  jsou tedy podle (2.282) následující:

$$\begin{aligned} a_{1,1} &= A_1 f_{1,1} \exp(i\varphi_1) = \frac{A_1}{\sqrt{2}} \exp(i\varphi_1), & a_{2,1} &= A_1 f_{2,1} \exp(i\varphi_1) = \frac{A_1}{\sqrt{2}} \exp(i\varphi_1), \\ a_{1,2} &= A_2 f_{1,2} \exp(i\varphi_2) = \frac{A_2}{\sqrt{2}} \exp(i\varphi_2), & a_{2,2} &= A_2 f_{2,2} \exp(i\varphi_2) = -\frac{A_2}{\sqrt{2}} \exp(i\varphi_2). \end{aligned}$$

### Vyjádření obecného řešení

Obecné řešení pohybových rovnic (2.296) napíšeme podle (2.285) takto:

$$x_1(t) = A_1 f_{1,1} \cos(\Omega_1 t + \varphi_1) + A_2 f_{1,2} \cos(\Omega_2 t + \varphi_2), \quad (2.306)$$

$$x_2(t) = A_1 f_{2,1} \cos(\Omega_1 t + \varphi_1) + A_2 f_{2,2} \cos(\Omega_2 t + \varphi_2). \quad (2.307)$$

Po dosazení za  $f_{1,1}$  a  $f_{2,1}$  z (2.301) a  $f_{1,2}$  a  $f_{2,2}$  z (2.304) pak dostáváme

$$x_1(t) = \frac{A_1}{\sqrt{2}} \cos(\Omega_1 t + \varphi_1) + \frac{A_2}{\sqrt{2}} \cos(\Omega_2 t + \varphi_2), \quad (2.308)$$

$$x_2(t) = \frac{A_1}{\sqrt{2}} \cos(\Omega_1 t + \varphi_1) - \frac{A_2}{\sqrt{2}} \cos(\Omega_2 t + \varphi_2). \quad (2.309)$$

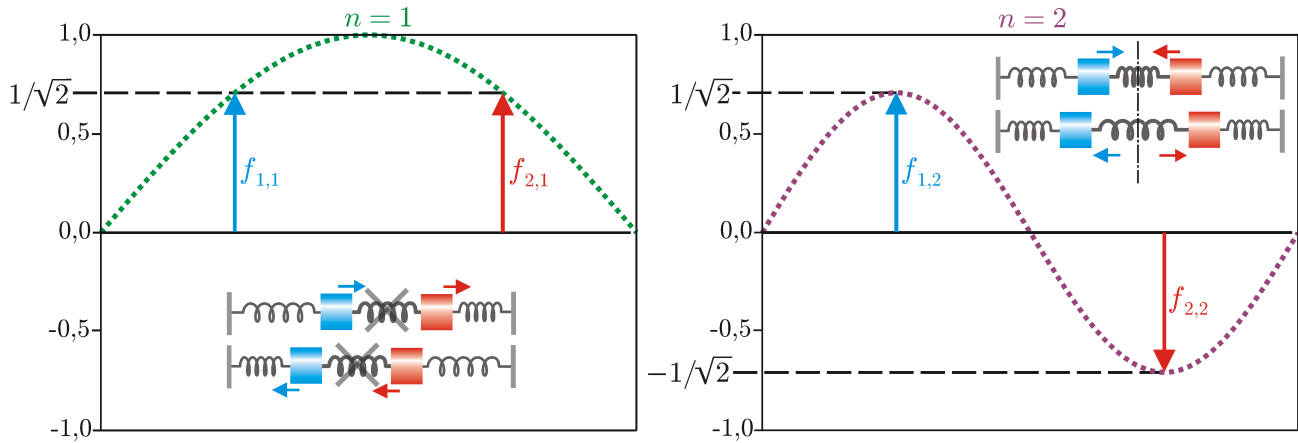
Tento výsledek stojí za zamyšlení. Vidíme, že v případě  $A_2 = 0$  jsou obě výchylky stejné co do velikosti i co do znaménka. To odpovídá případu, kdy tělesa kmitají shodně, přičemž pružina mezi nimi se nedeformuje. Kdybychom tuto pružinu odstranili, pohyb takové soustavy by se nezměnil, viz obr. 2.33 vlevo. Nejsme proto překvapeni, že platí  $\Omega_1 = \sqrt{k/m}$ , jako kdyby rovnoběžně kmitaly obě tělesa pouze na vnějších pružinách tuhosti  $k$  vetknutých do zdi. Tomuto způsobu kmitání říkáme *symetrický mód*.

V případě  $A_1 = 0$  jsou výchylky shodné co do velikosti avšak opačných znamének. Tělesa tedy kmitají proti sobě a tudíž k tuhosti  $k$  obou krajních pružin se přidává i tuhost prostřední pružiny  $k$ , jejíž střed se však nepohybuje. Zde si můžeme představit, že bychom uprostřed postavili zeď. Prostřední pružinu bychom rozřízli na dvě poloviny o tuhosti  $2K$  a do obou stran prostřední zdi bychom každou z nich vetkli. Opět by šlo o dvě tělesa kmitající odděleně, tentokrát však připojené z vnější strany k pružině tuhosti  $k$  a z vnitřní strany k pružině tuhosti  $2K$ . To je znázorněno na obr. 2.33 vpravo, přičemž prostřední zeď je naznačena na obrázcích uvnitř čerchovanou čarou. Taková tělesa samozřejmě kmitají s úhlovou frekvencí  $\Omega_2 = \sqrt{(2K + k)/m}$ . O tomto způsobu kmitání mechanické soustavy řekneme, že nastal *antisymetrický mód*.

Oba případy nám připomínají kmity stojaté vlny struny s pevně uchycenými konci, jak ukazují tečkované křivky sinusového tvaru v obou obrázcích. Kmity na struně se však budeme zabývat až v příští kapitole.

Můžeme tedy říci, že obecné výchylky (2.308) a (2.309) obou těles jsou dány lineární kombinací symetrického a antisymetrického módu. Rychlosti každého z těles jsou potom rovny

<sup>18</sup>Není divu, neboť to jsou vlastní vektory symetrické matice v (2.299) a (2.302). A jak víme z kurzu lineární algebry, vlastní vektory symetrických matic jsou vždy ortogonální, pokud příslušná vlastní čísla jsou různá, což je zde zřejmě splněno.



Obrázek 2.33: Grafické znázornění souboru amplitud. Vlevo: Symetrický mód s koeficienty  $f_{1,1} = f_{2,1} \cong 0,71$  odpovídajícími charakteristické frekvenci  $\Omega_1$  ( $n = 1$ ), viz (2.301). Vpravo: Antisymetrický mód s koeficienty  $f_{1,2} = -f_{2,2} \cong 0,71$  odpovídajícími charakteristické frekvenci  $\Omega_2$  ( $n = 2$ ), viz (2.304). Obrázky uvnitř naznačují, jakým způsobem při dané charakteristické frekvenci obě tělesa kmitají.

derivacím těchto výchylek podle času, tj.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -\frac{\Omega_1 A_1}{\sqrt{2}} \sin(\Omega_1 t + \varphi_1) - \frac{\Omega_2 A_2}{\sqrt{2}} \sin(\Omega_2 t + \varphi_2), \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{\Omega_1 A_1}{\sqrt{2}} \sin(\Omega_1 t + \varphi_1) + \frac{\Omega_2 A_2}{\sqrt{2}} \sin(\Omega_2 t + \varphi_2). \end{aligned}$$

Nyní stačí určit dvě reálné amplitudy  $A_1$ ,  $A_2$  a dvě fáze  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ . Získáme je ze čtyř počátečních podmínek pro obě tělesa mechanické soustavy, které zvolíme v následujícím tvaru:

$$x_1(0) = 0, \quad \dot{x}_1(0) = v_0, \quad x_2(0) = 0, \quad \dot{x}_2(0) = 0, \quad (2.310)$$

neboli na začátku jsou obě tělesa v rovnovážných polohách a první těleso má počáteční rychlost  $v_0$ , zatímco druhé těleso je v klidu. Lze ukázat, že hledané fáze a amplitudy vyjdou takto:

$$\varphi_1 = \varphi_2 = -\pi/2, \quad A_1 = \frac{v_0}{\Omega_1 \sqrt{2}}, \quad A_2 = \frac{v_0}{\Omega_2 \sqrt{2}}.$$

Polohy a rychlosti budou tedy nakonec popsány následujícími funkcemi:

$$x_1(t) = \frac{v_0}{2} \left( \frac{\sin \Omega_1 t}{\Omega_1} + \frac{\sin \Omega_2 t}{\Omega_2} \right), \quad (2.311)$$

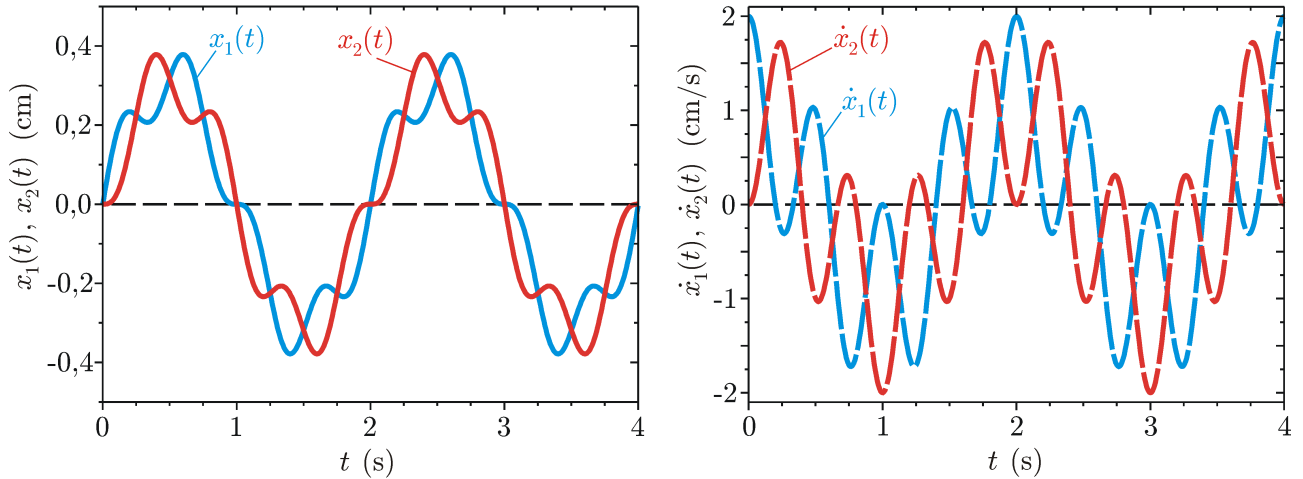
$$x_2(t) = \frac{v_0}{2} \left( \frac{\sin \Omega_1 t}{\Omega_1} - \frac{\sin \Omega_2 t}{\Omega_2} \right) \quad (2.312)$$

a

$$\dot{x}_1(t) = \frac{1}{2} v_0 (\cos \Omega_1 t + \cos \Omega_2 t), \quad (2.313)$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{1}{2} v_0 (\cos \Omega_1 t - \cos \Omega_2 t). \quad (2.314)$$

Časové průběhy poloh a rychlostí obou těles s uvedenými počátečními podmínkami jsou ukázány na obr. 2.34.



Obrázek 2.34: Vlevo: Časová závislost polohy  $x_1$  modrého tělesa na obr. 2.32 (modrá křivka) podle (2.311) a polohy  $x_2$  červeného tělesa na obr. 2.32 (červená křivka) podle (2.312). Vpravo: Časová závislost rychlosti  $\dot{x}_1$  (modrá přerušovaná křivka) podle (2.313) a rychlosti  $\dot{x}_2$  (červená přerušovaná křivka) podle (2.314). Platí:  $v_0 = 2 \text{ cm/s}$  (viz počáteční podmínky (2.310)),  $\Omega_1 = \pi \text{ s}^{-1}$ ,  $\Omega_2 = 4\pi \text{ s}^{-1}$ .

### Normální souřadnice a mechanická energie

Normální souřadnice (2.289) zřejmě budou v tomto případě podle (2.306) a (2.307) tyto:

$$u_1(t) = A_1 \sqrt{\mu_1} \cos(\Omega_1 t + \varphi_1), \quad u_2(t) = A_2 \sqrt{\mu_2} \cos(\Omega_2 t + \varphi_2), \quad (2.315)$$

kde  $\mu_1$  a  $\mu_2$  mají takové hodnoty, aby platily podmínky (2.292) a (2.293), tj.

$$m \frac{f_{1,n} f_{1,l} + f_{2,n} f_{2,l}}{\sqrt{\mu_n \mu_l}} = \begin{cases} 1, & \text{když } l = n, \\ 0, & \text{když } l \neq n \end{cases} \quad (2.316)$$

a

$$\frac{C_{11} f_{1,n} f_{1,l} + C_{12} (f_{1,n} f_{2,l} + f_{2,n} f_{1,l}) + C_{22} f_{2,n} f_{2,l}}{\sqrt{\mu_n \mu_l}} = \begin{cases} \Omega_n^2, & \text{když } l = n, \\ 0, & \text{když } l \neq n. \end{cases} \quad (2.317)$$

Ukážeme, že všechny tyto podmínky jsou splněny tehdy, když

$$\mu_1 = \mu_2 = m.$$

Dosadíme-li totiž uvedené hodnoty do (2.316), vykrátí se  $m$  a dostaneme následující čtyři výsledky. Pro  $n = l = 1$  a  $n = l = 2$  dostáváme nám známé vztahy (2.300) a (2.303):

$$f_{1,1}^2 + f_{2,1}^2 = f_{1,2}^2 + f_{2,2}^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

a pro  $n = 1, l = 2$  a  $n = 2, l = 1$ :

$$f_{1,1} f_{1,2} + f_{2,1} f_{2,2} = f_{1,2} f_{1,1} + f_{2,2} f_{2,1} = 0,$$

jak jsme již ukázali, viz (2.305). Stejně tak jsou splněny i podmínky (2.317). Pro  $n = l = 1$ :

$$\frac{C_{11} f_{1,1}^2 + C_{12} (f_{1,1} f_{2,1} + f_{2,1} f_{1,1}) + C_{22} f_{2,1}^2}{m} = \frac{\frac{1}{2}(K+k) - K + \frac{1}{2}(K+k)}{m} = \frac{k}{m} = \Omega_1^2,$$

pro  $n = l = 2$ :

$$\frac{C_{11}f_{1,2}^2 + C_{12}(f_{1,2}f_{2,2} + f_{2,2}f_{1,2}) + C_{22}f_{2,2}^2}{m} = \frac{\frac{1}{2}(K+k) + K + \frac{1}{2}(K+k)}{m} = \frac{2K+k}{m} = \Omega_2^2.$$

A konečně pro  $n = 1, l = 2$  a  $n = 2, l = 1$ :

$$\begin{aligned} & \frac{C_{11}f_{1,1}f_{1,2} + C_{12}(f_{1,1}f_{2,2} + f_{2,1}f_{1,2}) + C_{22}f_{2,1}f_{2,2}}{m} = \\ & = \frac{C_{11}f_{1,2}f_{1,1} + C_{12}(f_{1,2}f_{2,1} + f_{2,2}f_{1,1}) + C_{22}f_{2,2}f_{2,1}}{m} = \frac{\frac{1}{2}(K+k) - \frac{1}{2}(K+k)}{m} = 0. \end{aligned}$$

Normálními souřadnicemi tedy jsou funkce

$$u_1(t) = A_1\sqrt{m}\cos(\Omega_1t + \varphi_1), \quad u_2(t) = A_2\sqrt{m}\cos(\Omega_2t + \varphi_2) \quad (2.318)$$

a podle (2.308) a (2.309) pro ně platí

$$u_1 = \sqrt{\frac{m}{2}}(x_1 + x_2), \quad u_2 = \sqrt{\frac{m}{2}}(x_1 - x_2).$$

Jejich časové derivace dále vycházejí takto:

$$\dot{u}_1(t) = -\Omega_1A_1\sqrt{m}\sin(\Omega_1t + \varphi_1), \quad \dot{u}_2(t) = -\Omega_2A_2\sqrt{m}\sin(\Omega_2t + \varphi_2). \quad (2.319)$$

Po dosazení do (2.294) celková mechanická energie této soustavy tedy vyjde ve tvaru:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}\dot{u}_1^2 + \frac{1}{2}\dot{u}_2^2 + \frac{1}{2}\Omega_1^2u_1^2 + \frac{1}{2}\Omega_2^2u_2^2 = \\ &= \frac{1}{2}[\Omega_1^2A_1^2m\sin^2(\Omega_1t + \varphi_1) + \Omega_2^2A_2^2m\sin^2(\Omega_2t + \varphi_2)] + \\ &+ \frac{1}{2}[\Omega_1^2A_1^2m\cos^2(\Omega_1t + \varphi_1) + \Omega_2^2A_2^2m\cos^2(\Omega_2t + \varphi_2)] = \\ &= \frac{1}{2}m(\Omega_1^2A_1^2 + \Omega_2^2A_2^2). \end{aligned} \quad (2.320)$$

Vidíme, že neobsahuje součiny kmitů s různými frekvencemi a podle očekávání se samozřejmě zachovává.

## 2.7.2 Nesymetrický řetízek dvou těles

Zůstaňme ještě u mechanické soustavy s dvěma stupni volnosti ( $M = 2$ ) tvořené dvěma tělesy o stejných hmotnostech  $m$ . Nyní jsou obě tělesa spojena pružinou o tuhosti  $k$  a pouze jedno z těles je připevněno další pružinou o stejné tuhosti do kolmé zdi. Osy obou pružin jsou zase rovnoběžné. Pro popis polohy těles tedy opět využijeme kartézských souřadnic  $x_1$  a  $x_2$  rovnoběžných s pružinami a jejich počátky umístíme do bodů, ve kterých jsou pružiny nezdeformované, tj.  $(x_{e,1}, x_{e,2}) = (0, 0)$ , viz podmínka (2.267). Geometrie zadání úlohy včetně souřadnic je ukázána na obr. 2.35.

### Tvar potenciální energie

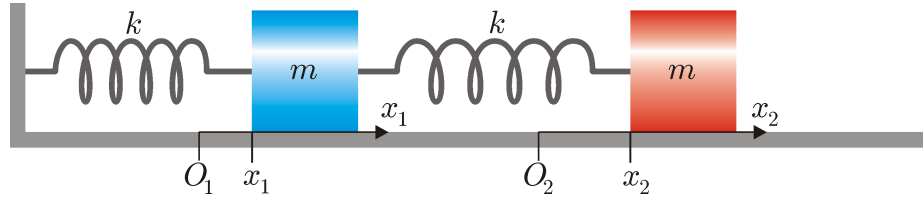
Potenciální energie (2.270) bude nyní zřejmě následující:

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}k(x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 = kx_1^2 - kx_1x_2 + \frac{1}{2}kx_2^2. \quad (2.321)$$

Podle (2.270) tedy platí

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}.$$

Vidíme, že matice  $C_{ij}$  je opět symetrická, přestože nyní nepopisujeme symetrickou úlohu.



Obrázek 2.35: Nesymetrický řetízek dvou těles, jejichž polohy jsou popsány kartézskými souřadnicemi  $x_1$  a  $x_2$ .

### Sestavení pohybových rovnic

Odtud dostáváme pohybové rovnice (2.273) v podobě soustavy rovnic:

$$m\ddot{x}_1 = -2kx_1 + kx_2, \quad m\ddot{x}_2 = kx_1 - kx_2 \quad (2.322)$$

a jsou opět provázané.

### Hledání charakteristických frekvencí

Nyní tedy bude homogenní soustava rovnic (2.279) tato:

$$\begin{bmatrix} -m\Omega^2 + 2k & -k \\ -k & -m\Omega^2 + k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.323)$$

Podle (2.280)

$$\det \begin{bmatrix} -m\Omega^2 + 2k & -k \\ -k & -m\Omega^2 + k \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad (-m\Omega^2 + 2k)(-m\Omega^2 + k) - k^2 = 0,$$

odkud získáváme tuto kvadratickou rovnici pro  $\Omega^2$ :

$$\Omega^4 - \frac{3k}{m}\Omega^2 + \frac{k^2}{m^2} = 0. \quad (2.324)$$

Její dvě řešení jsou následující:

$$\begin{aligned} \Omega_1^2 &= \frac{3k}{2m} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{9k^2}{m^2} - \frac{4k^2}{m^2}} = \frac{(3 - \sqrt{5})k}{2m}, \\ \Omega_2^2 &= \frac{3k}{2m} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{9k^2}{m^2} - \frac{4k^2}{m^2}} = \frac{(3 + \sqrt{5})k}{2m}. \end{aligned}$$

Obdrželi jsme tedy dvě (reálné) charakteristické frekvence

$$\Omega_1 = \sqrt{\frac{(3 - \sqrt{5})k}{2m}} \cong 0,62\sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \Omega_2 = \sqrt{\frac{(3 + \sqrt{5})k}{2m}} \cong 1,62\sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (2.325)$$

### Nalezení souboru amplitud

Pro charakteristickou frekvenci  $\Omega_1 = \sqrt{(3 - \sqrt{5})k/(2m)}$  bude soustava rovnic (2.284) následující:

$$\begin{bmatrix} 2k/m & -k/m \\ -k/m & k/m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{1,1} \\ f_{2,1} \end{bmatrix} = \frac{(3 - \sqrt{5})k}{2m} \begin{bmatrix} f_{1,1} \\ f_{2,1} \end{bmatrix}. \quad (2.326)$$

Ta spolu s podmínkou podle (2.283)

$$f_{1,1}^2 + f_{2,1}^2 = 1 \quad (2.327)$$

dává řešení

$$f_{1,1} = \frac{2}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} \cong 0,53, \quad f_{2,1} = \frac{1 + \sqrt{5}}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} \cong 0,85. \quad (2.328)$$

V případě charakteristické frekvence  $\Omega_2 = \sqrt{(3 + \sqrt{5})k/(2m)}$  dostáváme tuto soustavu rovnic (2.284):

$$\begin{bmatrix} 2k/m & -k/m \\ -k/m & k/m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{1,2} \\ f_{2,2} \end{bmatrix} = \frac{(3 + \sqrt{5})k}{2m} \begin{bmatrix} f_{1,2} \\ f_{2,2} \end{bmatrix}. \quad (2.329)$$

a s podmínkou (2.283)

$$f_{1,2}^2 + f_{2,2}^2 = 1 \quad (2.330)$$

má toto řešení:

$$f_{1,2} = \frac{2}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} \cong 0,85, \quad f_{2,2} = -\frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} \cong -0,53. \quad (2.331)$$

Opět zjišťujeme, že vektory  $(f_{1,1}, f_{2,1})$  a  $(f_{1,2}, f_{2,2})$  jsou ortogonální:

$$f_{1,1}f_{1,2} + f_{2,1}f_{2,2} = \frac{2}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} \frac{2}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} - \frac{1 + \sqrt{5}}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} \frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} = 0. \quad (2.332)$$

Nakonec tedy získáváme tyto komplexní amplitudy, viz (2.282):

$$\begin{aligned} a_{1,1} &= \frac{2A_1}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} \exp(i\varphi_1), & a_{2,1} &= \frac{(1 + \sqrt{5})A_1}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} \exp(i\varphi_1), \\ a_{1,2} &= \frac{2A_2}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} \exp(i\varphi_2), & a_{2,2} &= -\frac{(\sqrt{5} - 1)A_2}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} \exp(i\varphi_2). \end{aligned}$$

### Vyjádření obecného řešení

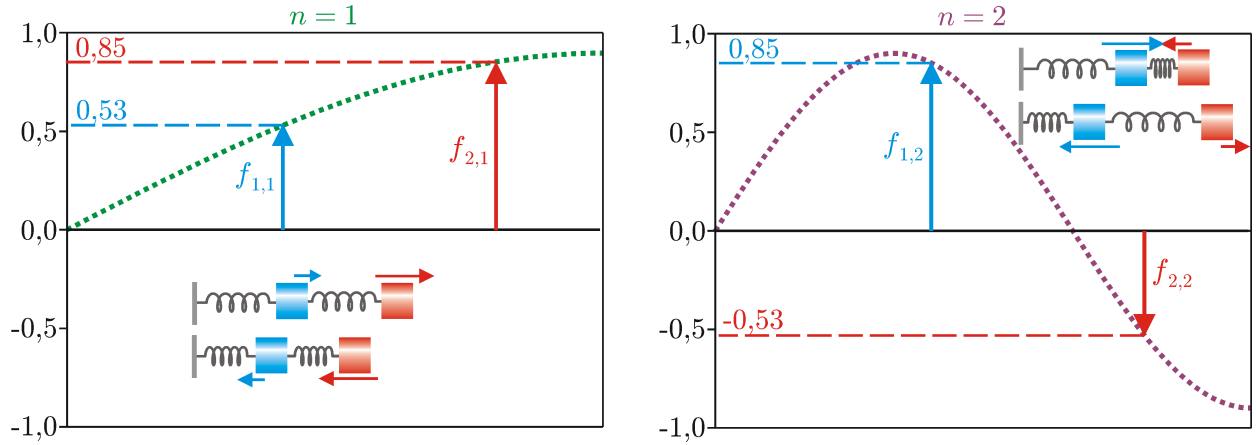
Obecné řešení pohybových rovnic (2.322) potom vycházejí podle (2.285) takto:

$$x_1(t) = \frac{2A_1}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} \cos(\Omega_1 t + \varphi_1) + \frac{2A_2}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} \cos(\Omega_2 t + \varphi_2), \quad (2.333)$$

$$x_2(t) = \frac{(1 + \sqrt{5})A_1}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} \cos(\Omega_1 t + \varphi_1) - \frac{(\sqrt{5} - 1)A_2}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} \cos(\Omega_2 t + \varphi_2). \quad (2.334)$$

Opět zde vidíme dva případy: Pokud  $A_2 = 0$ , výchylky obou těles mají úhlovou frekvenci  $\Omega_1$  a mají též i shodná znaménka, avšak různé velikosti. V případě, že  $A_1 = 0$  výchylky kmitají s úhlovou frekvencí  $\Omega_2$  a mají opačná znaménka a opět různé velikosti. Oba tyto módy jsou naznačeny na obr. 2.36 a zase nám připomínají stojaté vlny na kmitající struně, ale tentokrát s jedním pevně uchyceným a druhým volným koncem, viz tečkované křivky v obou obrázcích.





Obrázek 2.36: Grafické znázornění souboru amplitud. Vlevo: Mód  $A_2 = 0$  s koeficienty  $f_{1,1} \cong 0,53$ ,  $f_{2,1} \cong 0,85$  odpovídajícími charakteristické frekvenci  $\Omega_1$  ( $n = 1$ ), viz (2.328). Vpravo: Mód  $A_1 = 0$  s koeficienty  $f_{1,2} \cong 0,85$ ,  $f_{2,2} \cong -0,53$  odpovídajícími charakteristické frekvenci  $\Omega_2$  ( $n = 2$ ), viz (2.331). Obrázky uvnitř naznačují, jakým způsobem při dané charakteristické frekvenci obě tělesa kmitají.

Rychlosti každého z těles dostaneme derivací těchto výchylek podle času, tj.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -\frac{2\Omega_1 A_1}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} \sin(\Omega_1 t + \varphi_1) - \frac{2\Omega_2 A_2}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} \sin(\Omega_2 t + \varphi_2), \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{(1 + \sqrt{5}) \Omega_1 A_1}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} \sin(\Omega_1 t + \varphi_1) + \frac{(\sqrt{5} - 1) \Omega_2 A_2}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} \sin(\Omega_2 t + \varphi_2). \end{aligned}$$

Dvě reálné amplitudy  $A_1$ ,  $A_2$  a dvě fáze  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  opět získáme ze čtyř počátečních podmínek, jež zvolíme stejně, jako v předchozí úloze, viz (2.310):

$$x_1(0) = 0, \quad \dot{x}_1(0) = v_0, \quad x_2(0) = 0, \quad \dot{x}_2(0) = 0. \quad (2.335)$$

Hledané fáze potom vyjdou

$$\varphi_1 = \varphi_2 = -\pi/2$$

a amplitudy

$$A_1 = \frac{v_0 (\sqrt{5} - 1) \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4\Omega_1 \sqrt{5}} \cong \frac{0,53 v_0}{\Omega_1}, \quad A_2 = \frac{v_0 (1 + \sqrt{5}) \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4\Omega_2 \sqrt{5}} \cong \frac{0,85 v_0}{\Omega_2}.$$

Polohy a rychlosti za počátečních podmínek (2.335) mají nakonec následujícími tvary:

$$x_1(t) = \frac{v_0}{2\sqrt{5}} \left[ \frac{(\sqrt{5} - 1) \sin \Omega_1 t}{\Omega_1} + \frac{(1 + \sqrt{5}) \sin \Omega_2 t}{\Omega_2} \right], \quad (2.336)$$

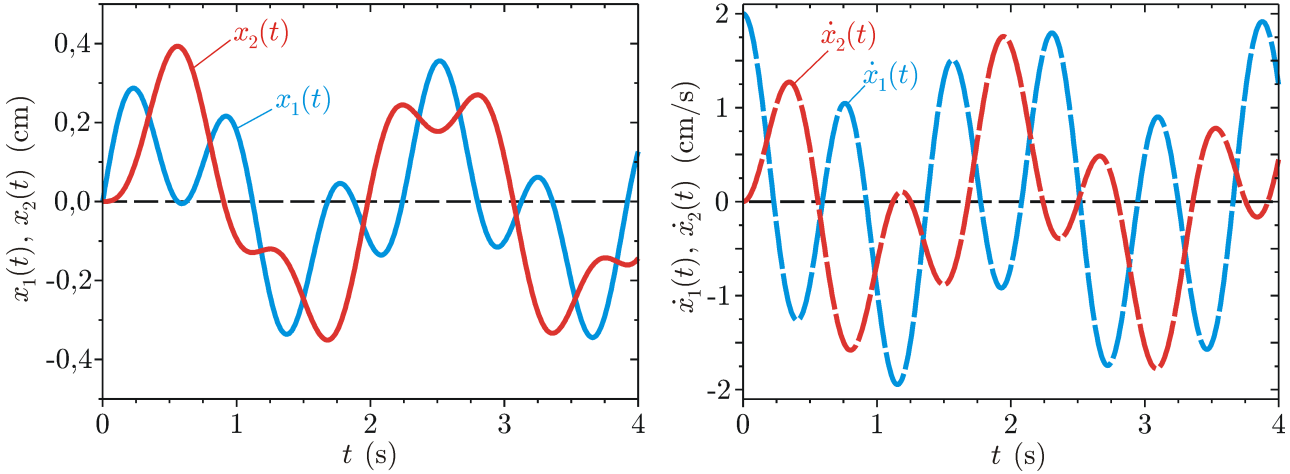
$$x_2(t) = \frac{v_0}{\sqrt{5}} \left( \frac{\sin \Omega_1 t}{\Omega_1} - \frac{\sin \Omega_2 t}{\Omega_2} \right) \quad (2.337)$$

a

$$\dot{x}_1(t) = \frac{v_0}{2\sqrt{5}} \left[ (\sqrt{5} - 1) \cos \Omega_1 t + (1 + \sqrt{5}) \cos \Omega_2 t \right], \quad (2.338)$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{v_0}{\sqrt{5}} (\cos \Omega_1 t - \cos \Omega_2 t). \quad (2.339)$$

Časové průběhy poloh a rychlostí obou těles s uvedenými počátečními podmínkami jsou ukázány na obr. 2.37.



Obrázek 2.37: Vlevo: Časová závislost polohy  $x_1$  modrého tělesa na obr. 2.35 (modrá křivka) podle (2.336) a polohy  $x_2$  červeného tělesa na obr. 2.35 (červená křivka) podle (2.337). Vpravo: Časová závislost rychlosti  $\dot{x}_1$  (modrá přerušovaná křivka) podle (2.338) a rychlosti  $\dot{x}_2$  (červená přerušovaná křivka) podle (2.339). Platí:  $v_0 = 2 \text{ cm/s}$  (viz počáteční podmínky (2.335)),  $\Omega_1 = 3,10 \text{ s}^{-1}$ ,  $\Omega_2 = 8,12 \text{ s}^{-1}$ .

### Normální souřadnice a mechanická energie

Normální souřadnice (2.289) zde jsou podle (2.333) a (2.334)

$$u_1(t) = A_1 \sqrt{\mu_1} \cos(\Omega_1 t + \varphi_1), \quad u_2(t) = A_2 \sqrt{\mu_2} \cos(\Omega_2 t + \varphi_2) \quad (2.340)$$

a  $\mu_1$  a  $\mu_2$  mají opět hodnoty

$$\mu_1 = \mu_2 = m.$$

Jedině tak totiž platí podmínky (2.292) a (2.293), které nabývají stejných tvarů (2.316) a (2.317) z předchozí úlohy, tj.

$$m \frac{f_{1,n} f_{1,l} + f_{2,n} f_{2,l}}{\sqrt{\mu_n \mu_l}} = \begin{cases} 1, & \text{když } l = n, \\ 0, & \text{když } l \neq n \end{cases} \quad (2.341)$$

$$\text{a} \quad \frac{C_{11} f_{1,n} f_{1,l} + C_{12} (f_{1,n} f_{2,l} + f_{2,n} f_{1,l}) + C_{22} f_{2,n} f_{2,l}}{\sqrt{\mu_n \mu_l}} = \begin{cases} \Omega_n^2, & \text{když } l = n, \\ 0, & \text{když } l \neq n. \end{cases} \quad (2.342)$$

Dosazením z (2.328) a (2.331) podmínka (2.341) pro  $n = l = 1$  a  $n = l = 2$  zřejmě odpovídá vztahům (2.327) a (2.330):

$$f_{1,1}^2 + f_{2,1}^2 = f_{1,2}^2 + f_{2,2}^2 = \frac{4}{10 + 2\sqrt{5}} + \frac{(1 + \sqrt{5})^2}{10 + 2\sqrt{5}} = \frac{4}{10 - 2\sqrt{5}} + \frac{(\sqrt{5} - 1)^2}{10 - 2\sqrt{5}} = 1$$

a pro  $n = 1, l = 2$  a  $n = 2, l = 1$  vztahu (2.332):

$$f_{1,1} f_{1,2} + f_{2,1} f_{2,2} = f_{1,2} f_{1,1} + f_{2,2} f_{2,1} = 0.$$

Stejně tak jsou splněny i podmínky (2.342). Pro  $n = l = 1$ :

$$\begin{aligned} \frac{C_{11} f_{1,1}^2 + C_{12} (f_{1,1} f_{2,1} + f_{2,1} f_{1,1}) + C_{22} f_{2,1}^2}{m} &= \frac{8k - 2k(2 + 2\sqrt{5}) + k(1 + \sqrt{5})^2}{(10 + 2\sqrt{5})m} = \\ &= \frac{(10 - 2\sqrt{5})k}{(10 + 2\sqrt{5})m} = \frac{(3 - \sqrt{5})k}{2m} = \Omega_1^2, \end{aligned}$$

pro  $n = n = 2$ :

$$\begin{aligned} \frac{C_{11}f_{1,2}^2 + C_{12}(f_{1,2}f_{2,2} + f_{2,2}f_{1,2}) + C_{22}f_{2,2}^2}{m} &= \frac{8k + 4k(\sqrt{5} - 1) + k(\sqrt{5} - 1)^2}{(10 - 2\sqrt{5})m} = \\ &= \frac{(10 + 2\sqrt{5})k}{(10 - 2\sqrt{5})m} = \frac{(3 + \sqrt{5})k}{2m} = \Omega_2^2. \end{aligned}$$

A konečně pro  $n = 1, l = 2$  a  $n = 2, l = 1$ :

$$\begin{aligned} \frac{C_{11}f_{1,1}f_{1,2} + C_{12}(f_{1,1}f_{2,2} + f_{2,1}f_{1,2}) + C_{22}f_{2,1}f_{2,2}}{m} &= \\ = \frac{C_{11}f_{1,2}f_{1,1} + C_{12}(f_{1,2}f_{2,1} + f_{2,2}f_{1,1}) + C_{22}f_{2,2}f_{2,1}}{m} &= \\ = \frac{8k - k(2 - 2\sqrt{5} + 2 + 2\sqrt{5}) - k(1 + \sqrt{5})(\sqrt{5} - 1)}{m\sqrt{(10 + 2\sqrt{5})(10 - 2\sqrt{5})}} &= 0. \end{aligned}$$

Normální souřadnice tedy jsou

$$u_1(t) = A_1\sqrt{m}\cos(\Omega_1t + \varphi_1), \quad u_2(t) = A_2\sqrt{m}\cos(\Omega_2t + \varphi_2), \quad (2.343)$$

a podle (2.333) a (2.334) pro ně platí

$$u_1 = \sqrt{\frac{m}{10 + 2\sqrt{5}}} \left[ 2x_1 + (1 + \sqrt{5})x_2 \right], \quad u_2 = \sqrt{\frac{m}{10 - 2\sqrt{5}}} \left[ 2x_1 - (\sqrt{5} - 1)x_2 \right].$$

Jelikož časové derivace (2.343) jsou stejné jako v předchozím příkladu, tj.

$$\dot{u}_1(t) = -\Omega_1A_1\sqrt{m}\sin(\Omega_1t + \varphi_1), \quad \dot{u}_2(t) = -\Omega_2A_2\sqrt{m}\sin(\Omega_2t + \varphi_2), \quad (2.344)$$

i celková mechanická energie (2.294) této soustavy vyjde stejně:

$$E = \frac{1}{2}\dot{u}_1^2 + \frac{1}{2}\dot{u}_2^2 + \frac{1}{2}\Omega_1^2u_1^2 + \frac{1}{2}\Omega_2^2u_2^2 = \frac{1}{2}m(\Omega_1^2A_1^2 + \Omega_2^2A_2^2). \quad (2.345)$$

### 2.7.3 Symetrický řetízek tří těles

Nyní se zaměříme na kmitající mechanickou soustavu se třemi stupni volnosti, tj.  $M = 3$ . Ta je tvořena třemi tělesy o stejných hmotnostech  $m$ , přičemž všechny jsou spojeny pružinami do řetízku o stejných tuhostech  $k$ . Každé z obou krajních těles jsou dále připevněny dalšími pružinami o stejných tuhostí do kolmých zdí. Osy všech čtyř pružin jsou rovnoběžné, a proto využijeme tři kartézských souřadnic  $x_1$ ,  $x_2$  a  $x_3$  rovnoběžných s pružinami. Počátky souřadnic umístíme do rovnovážných poloh těles, tj.  $(x_{e,1}, x_{e,2}, x_{e,3}) = (0, 0, 0)$ , jak říká podmínka (2.267). Geometrie zadání úlohy a kartézské souřadnice jsou znázorněny na obr. 2.38.

#### Tvar potenciální energie

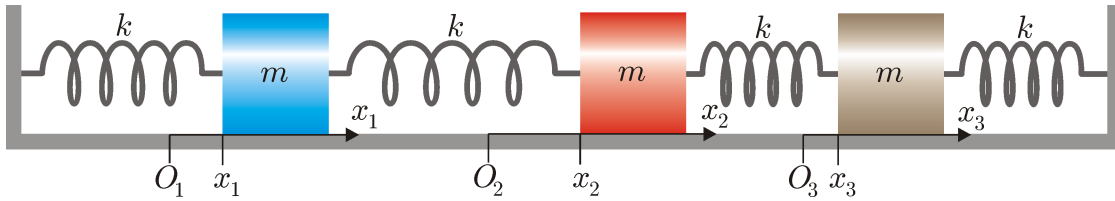
Potenciální energii (2.270) zřejmě napíšeme v tomto tvaru:

$$\begin{aligned} V(x_1, x_2, x_3) &= \frac{1}{2}k(x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2}k(x_2 - x_3)^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}kx_3^2 = \\ &= kx_1^2 - kx_1x_2 + kx_2^2 - kx_2x_3 + kx_3^2. \end{aligned} \quad (2.346)$$

Matice v (2.270) je tedy následující

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & 2k \end{bmatrix}$$

a je samozřejmě symetrická.



Obrázek 2.38: Symetrický řetězec tří těles, jejichž polohy jsou popsány kartézskými souřadnicemi  $x_1$ ,  $x_2$  a  $x_3$ .

### Sestavení pohybových rovnic

Pohybové rovnice (2.273) dostáváme v následující provázané soustavě rovnic:

$$m\ddot{x}_1 = -2kx_1 + kx_2, \quad m\ddot{x}_2 = kx_1 - 2kx_2 + kx_3, \quad m\ddot{x}_3 = kx_2 - 2kx_3. \quad (2.347)$$

### Hledání charakteristických frekvencí

Homogenní soustavu rovnic (2.279) tedy nalézáme ve tvaru

$$\begin{bmatrix} -m\Omega^2 + 2k & -k & 0 \\ -k & -m\Omega^2 + 2k & -k \\ 0 & -k & -m\Omega^2 + 2k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.348)$$

odkud podle (2.280)

$$\det \begin{bmatrix} -m\Omega^2 + 2k & -k & 0 \\ -k & -m\Omega^2 + 2k & -k \\ 0 & -k & -m\Omega^2 + 2k \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow (-m\Omega^2 + 2k) [(-m\Omega^2 + 2k)(-m\Omega^2 + 2k) - k^2] - k^2(-m\Omega^2 + 2k) = 0.$$

Tím dostáváme kubickou rovnici pro  $\Omega^2$ , kterou po vydělení  $m^3$  můžeme vytknutím první závorky napsat ve faktorizovaném tvaru

$$\left(-\Omega^2 + \frac{2k}{m}\right) \left(\Omega^4 - \frac{4k}{m}\Omega^2 + \frac{2k^2}{m^2}\right) = 0.$$

Jedno z jejích řešení získáme tak, že položíme první závorku rovnu nule:

$$\Omega_2^2 = \frac{2k}{m}.$$

A zbývající dvě řešení tak, že položíme rovnu nule druhou závorku, což vede na kvadratickou rovnici pro  $\Omega^2$ :

$$\Omega^4 - \frac{4k}{m}\Omega^2 + \frac{2k^2}{m^2} = 0.$$

Jejími řešeními jsou

$$\Omega_1^2 = \frac{4k}{2m} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{16k^2}{m^2} - \frac{8k^2}{m^2}} = \frac{(2 - \sqrt{2})k}{m}, \\ \Omega_3^2 = \frac{4k}{2m} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{16k^2}{m^2} - \frac{8k^2}{m^2}} = \frac{(2 + \sqrt{2})k}{m}.$$

Máme tedy celkem tři reálné charakteristické frekvence

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= \sqrt{\frac{(2 - \sqrt{2})k}{m}} \cong 0,77\sqrt{\frac{k}{m}}, & \Omega_2 &= \sqrt{\frac{2k}{m}} \cong 1,41\sqrt{\frac{k}{m}}, \\ \Omega_3 &= \sqrt{\frac{(2 + \sqrt{2})k}{m}} \cong 1,85\sqrt{\frac{k}{m}}.\end{aligned}\quad (2.349)$$

### Nalezení souboru amplitud

Soustava rovnic (2.284) odpovídající charakteristické frekvenci  $\Omega_1$  je následující:

$$\begin{bmatrix} 2k/m & -k/m & 0 \\ -k/m & 2k/m & -k/m \\ 0 & -k/m & 2k/m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{1,1} \\ f_{2,1} \\ f_{3,1} \end{bmatrix} = \frac{(2 - \sqrt{2})k}{m} \begin{bmatrix} f_{1,1} \\ f_{2,1} \\ f_{3,1} \end{bmatrix}.\quad (2.350)$$

Přidáme-li podmínku (2.283), kterou nyní nalzáme ve tvaru

$$f_{1,1}^2 + f_{2,1}^2 + f_{3,1}^2 = 1,\quad (2.351)$$

dostáváme toto řešení:

$$f_{1,1} = \frac{1}{2}, \quad f_{2,1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cong 0,71, \quad f_{3,1} = \frac{1}{2}.\quad (2.352)$$

Pro charakteristickou frekvenci  $\Omega_2$  máme soustavu rovnic (2.284)

$$\begin{bmatrix} 2k/m & -k/m & 0 \\ -k/m & 2k/m & -k/m \\ 0 & -k/m & 2k/m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{1,2} \\ f_{2,2} \\ f_{3,2} \end{bmatrix} = \frac{2k}{m} \begin{bmatrix} f_{1,2} \\ f_{2,2} \\ f_{3,2} \end{bmatrix},\quad (2.353)$$

přičemž spolu s podmínkou (2.283)

$$f_{1,2}^2 + f_{2,2}^2 + f_{3,2}^2 = 1\quad (2.354)$$

dává následující řešení:

$$f_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cong 0,71, \quad f_{2,2} = 0, \quad f_{3,2} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cong -0,71.\quad (2.355)$$

A konečně pro charakteristickou frekvenci  $\Omega_3$  bude soustava rovnic (2.284) tato:

$$\begin{bmatrix} 2k/m & -k/m & 0 \\ -k/m & 2k/m & -k/m \\ 0 & -k/m & 2k/m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{1,3} \\ f_{2,3} \\ f_{3,3} \end{bmatrix} = \frac{(2 + \sqrt{2})k}{m} \begin{bmatrix} f_{1,3} \\ f_{2,3} \\ f_{3,3} \end{bmatrix}.\quad (2.356)$$

S podmínkou (2.283) ve tvaru

$$f_{1,3}^2 + f_{2,3}^2 + f_{3,3}^2 = 1,\quad (2.357)$$

dostáváme řešení

$$f_{1,3} = \frac{1}{2}, \quad f_{2,3} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cong -0,71, \quad f_{3,3} = \frac{1}{2}.\quad (2.358)$$

Vzhledem k tomu, že matice v (2.350), (2.353) a (2.356) je zase symetrická, vektory  $(f_{1,1}, f_{2,1}, f_{3,1})$ ,  $(f_{1,2}, f_{2,2}, f_{3,2})$  a  $(f_{1,3}, f_{2,3}, f_{3,3})$  jsou opět ortogonální, jak se můžeme snadno přesvědčit:

$$f_{1,1}f_{1,2} + f_{2,1}f_{2,2} + f_{3,1}f_{3,2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} + 0 - \frac{1}{2\sqrt{2}} = 0, \quad (2.359)$$

$$f_{1,2}f_{1,3} + f_{2,2}f_{2,3} + f_{3,2}f_{3,3} = \frac{1}{2\sqrt{2}} + 0 - \frac{1}{2\sqrt{2}} = 0, \quad (2.360)$$

$$f_{1,3}f_{1,1} + f_{2,3}f_{2,1} + f_{3,3}f_{3,1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 0. \quad (2.361)$$

Nakonec pak dostáváme následující komplexní amplitudy (2.282):

$$\begin{aligned} a_{1,1} &= \frac{A_1}{2} \exp(i\varphi_1), & a_{2,1} &= \frac{A_2}{\sqrt{2}} \exp(i\varphi_2), & a_{3,1} &= \frac{A_3}{2} \exp(i\varphi_3), \\ a_{1,2} &= \frac{A_1}{\sqrt{2}} \exp(i\varphi_1), & a_{2,2} &= 0, & a_{3,2} &= -\frac{A_3}{\sqrt{2}} \exp(i\varphi_3), \\ a_{1,3} &= \frac{A_1}{2} \exp(i\varphi_1), & a_{2,3} &= -\frac{A_2}{\sqrt{2}} \exp(i\varphi_2), & a_{3,3} &= \frac{A_3}{2} \exp(i\varphi_3). \end{aligned}$$

### Vyjádření obecného řešení

Nyní již můžeme podle (2.285) napsat obecné řešení pohybových rovnic (2.347):

$$x_1(t) = \frac{A_1}{2} \cos(\Omega_1 t + \varphi_1) + \frac{A_2}{\sqrt{2}} \cos(\Omega_2 t + \varphi_2) + \frac{A_3}{2} \cos(\Omega_3 t + \varphi_3), \quad (2.362)$$

$$x_2(t) = \frac{A_1}{\sqrt{2}} \cos(\Omega_1 t + \varphi_1) - \frac{A_3}{\sqrt{2}} \cos(\Omega_3 t + \varphi_3), \quad (2.363)$$

$$x_3(t) = \frac{A_1}{2} \cos(\Omega_1 t + \varphi_1) - \frac{A_2}{\sqrt{2}} \cos(\Omega_2 t + \varphi_2) + \frac{A_3}{2} \cos(\Omega_3 t + \varphi_3). \quad (2.364)$$

Je zřejmé, že tentokrát se můžeme zaměřit na tři případy: Pokud  $A_2 = A_3 = 0$ , výchylky všech tří těles mají úhlovou frekvenci  $\Omega_1$ , mají shodná znaménka a u těles  $m_1$  a  $m_3$  dokonce i stejné velikosti. Jde tedy o symetrický mód. Platí-li  $A_1 = A_3 = 0$ , soustava kmitá s úhlovou frekvencí  $\Omega_2$ . Tělesa  $m_1$  a  $m_3$  mají opačné výchylky a těleso  $m_2$  se nepohybuje vůbec. Toto je zřejmě antisymetrický mód. A konečně, jestliže  $A_1 = A_2 = 0$ , tělesa kmitají s úhlovou frekvencí  $\Omega_3$ , přičemž  $m_1$  a  $m_3$  mají shodné výchylky, zatímco  $m_2$  ji má s opačným znaménkem. Tento mód je tedy zase symetrický.

Všechny tři popsané módy jsou ukázány na obr. 2.39. Opět nám připomínají kmity stojaté vlny struny s dvěma pevně uchycenými konci, jak ukazují tečkované křivky v obrázcích.

Rychlosti každého z těles dostaneme časovou derivací těchto výchylek:

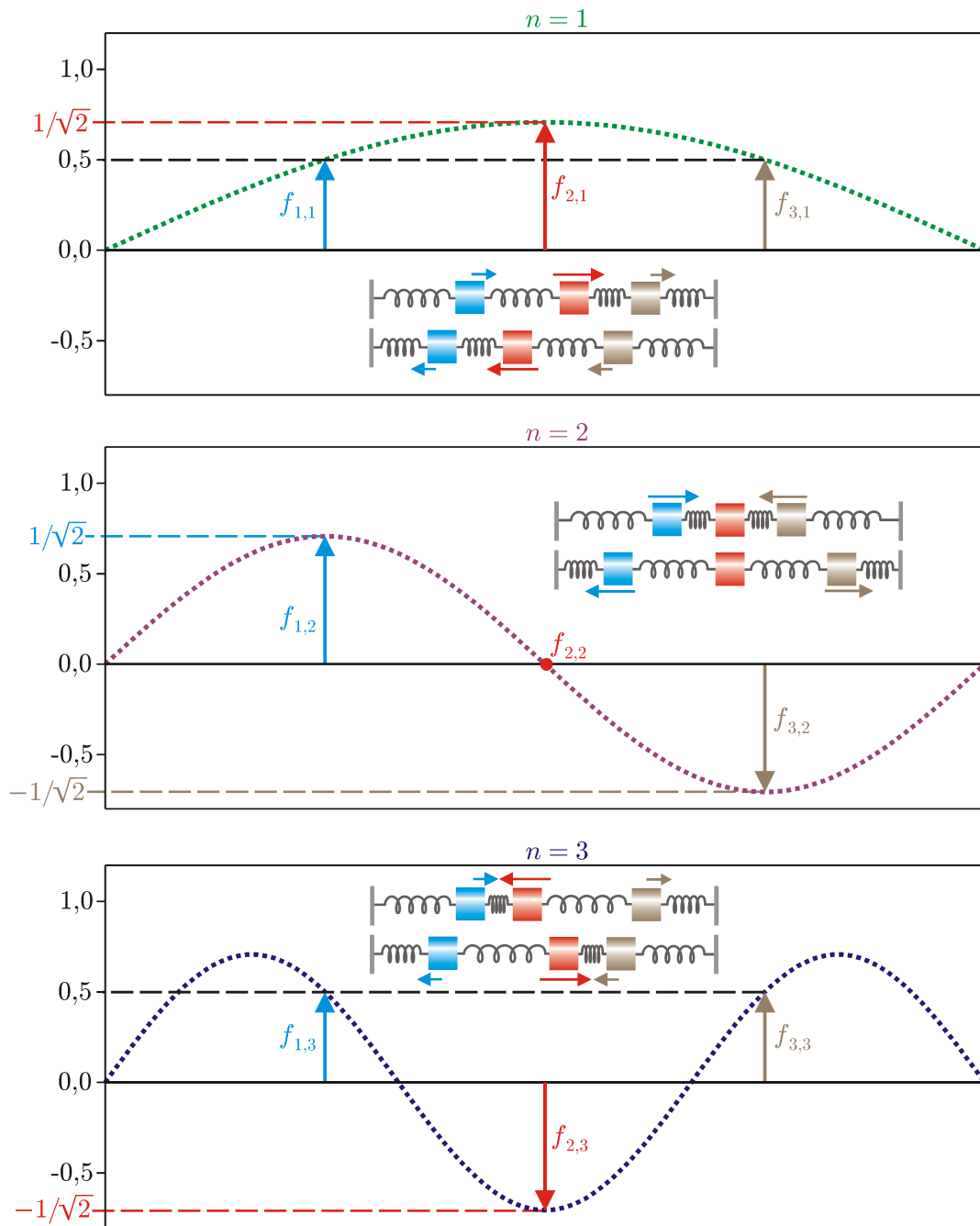
$$\dot{x}_1(t) = -\frac{A_1\Omega_1}{2} \sin(\Omega_1 t + \varphi_1) - \frac{A_2\Omega_2}{\sqrt{2}} \sin(\Omega_2 t + \varphi_2) - \frac{A_3\Omega_3}{2} \sin(\Omega_3 t + \varphi_3),$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{A_1\Omega_1}{\sqrt{2}} \sin(\Omega_1 t + \varphi_1) + \frac{A_3\Omega_3}{\sqrt{2}} \sin(\Omega_3 t + \varphi_3),$$

$$\dot{x}_3(t) = -\frac{A_1\Omega_1}{2} \sin(\Omega_1 t + \varphi_1) + \frac{A_2\Omega_2}{\sqrt{2}} \sin(\Omega_2 t + \varphi_2) - \frac{A_3\Omega_3}{2} \sin(\Omega_3 t + \varphi_3).$$

Tři amplitudy  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  a tři fáze  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\varphi_3$  určíme z šesti počátečních podmínek, které zvolíme takto:

$$x_1(0) = 0, \quad \dot{x}_1(0) = v_0, \quad x_2(0) = 0, \quad \dot{x}_2(0) = 0, \quad x_3(0) = 0, \quad \dot{x}_3(0) = 0. \quad (2.365)$$



Obrázek 2.39: Grafické znázornění souboru amplitud. Nahoře: Mód  $A_2 = A_3 = 0$  odpovídající charakteristické frekvenci  $\Omega_1$  ( $n = 1$ ) s koeficienty  $f_{1,1}$ ,  $f_{2,1}$  a  $f_{3,1}$  podle (2.352). Uprostřed: Mód  $A_1 = A_3 = 0$  odpovídající  $\Omega_2$  ( $n = 2$ ) s koeficienty  $f_{1,2}$ ,  $f_{2,2}$  a  $f_{3,2}$  podle (2.355). Dole: Mód  $A_1 = A_2 = 0$  odpovídající  $\Omega_3$  ( $n = 3$ ) s koeficienty  $f_{1,3}$ ,  $f_{2,3}$  a  $f_{3,3}$  podle (2.358). Obrázky uvnitř naznačují, jakým způsobem při dané charakteristické frekvenci tělesa kmitají.

To znamená, že mechanická soustava je na začátku v rovnovážné poloze a těleso  $m_1$  má počáteční rychlost  $v_0$ , zatímco ostatní dvě jsou v klidu. Lze ukázat, že fáze vyjdou

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = -\pi/2$$

a amplitudy

$$A_1 = \frac{v_0}{2\Omega_1}, \quad A_2 = \frac{v_0}{\Omega_2\sqrt{2}}, \quad A_3 = \frac{v_0}{2\Omega_3}.$$

Za počátečních podmínek (2.365) jsou tedy polohy a rychlosti tyto:

$$x_1(t) = \frac{1}{4}v_0 \left( \frac{\sin \Omega_1 t}{\Omega_1} + \frac{2 \sin \Omega_2 t}{\Omega_2} + \frac{\sin \Omega_3 t}{\Omega_3} \right), \quad (2.366)$$

$$x_2(t) = \frac{1}{4}v_0 \left( \frac{\sin \Omega_1 t}{\Omega_1} - \frac{\sin \Omega_3 t}{\Omega_3} \right), \quad (2.367)$$

$$x_3(t) = \frac{1}{4}v_0 \left( \frac{\sin \Omega_1 t}{\Omega_1} - \frac{2 \sin \Omega_2 t}{\Omega_2} + \frac{\sin \Omega_3 t}{\Omega_3} \right) \quad (2.368)$$

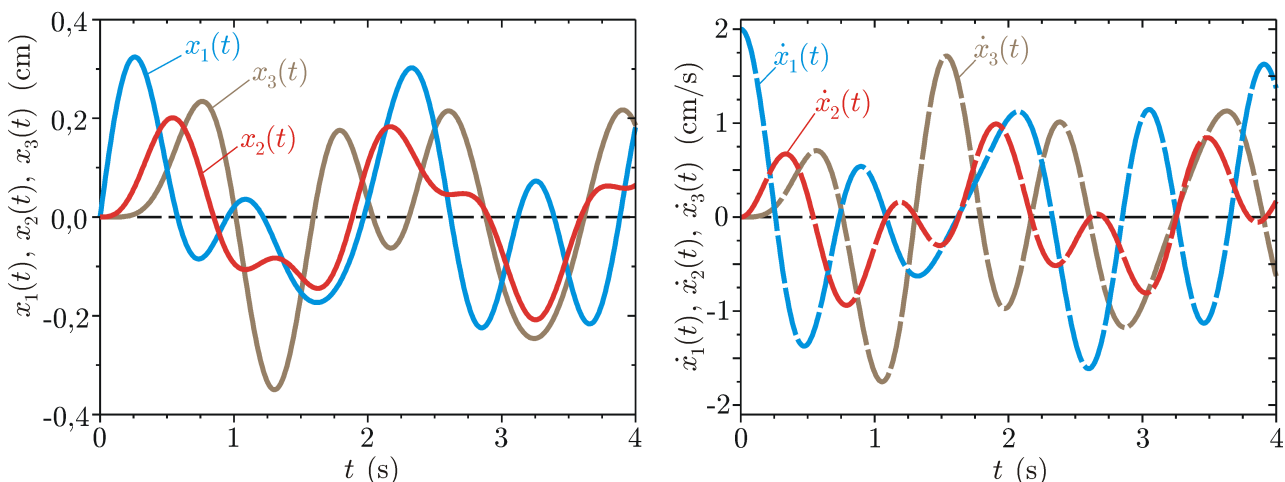
a

$$x_1(t) = \frac{1}{4}v_0 (\cos \Omega_1 t + 2 \cos \Omega_2 t + \cos \Omega_3 t), \quad (2.369)$$

$$x_2(t) = \frac{1}{4}v_0 (\cos \Omega_1 t - \cos \Omega_3 t), \quad (2.370)$$

$$x_3(t) = \frac{1}{4}v_0 (\cos \Omega_1 t - 2 \cos \Omega_2 t + \cos \Omega_3 t). \quad (2.371)$$

Jak závisí polohy a rychlosti všech tří těles na čase, je ukázáno na obr. 2.40. Můžeme si zde povšimnout, že nejdříve se začne pohybovat modré těleso, potom červené a nakonec hnědé. Vidíme tedy, že podmínky pro rozpohybování jednotlivých těles se postupně přemísťují zleva doprava a to způsobí, že kmitání jednotlivých těles jsou nadále postupně fázově „opozděna.“ Tento druh pohybu již nám začíná připomínat vlnění, kterému se budeme věnovat v další kapitole.



Obrázek 2.40: Vlevo: Časová závislost poloh  $x_1$  modrého tělesa (modrá křivka) podle (2.366),  $x_2$  červeného tělesa (červená křivka) podle (2.367) a  $x_3$  hnědého tělesa (hnědá křivka) podle (2.368) ukázaných na obr. 2.38. Vpravo: Časové závislosti příslušných rychlostí  $\dot{x}_1$  (modrá přerušovaná křivka) podle (2.369),  $\dot{x}_2$  (červená přerušovaná křivka) podle (2.370) a  $\dot{x}_3$  (hnědá přerušovaná křivka) podle (2.371). Platí:  $v_0 = 2 \text{ cm/s}$  (viz počáteční podmínky (2.365)),  $\Omega_1 = 1,08\pi \text{ s}^{-1}$ ,  $\Omega_2 = 2,00\pi \text{ s}^{-1}$ ,  $\Omega_3 = 2,61\pi \text{ s}^{-1}$ .

### Normální souřadnice a mechanická energie

Řešení (2.362), (2.363) a (2.364) nám dávají normální souřadnice (2.289) ve tvaru

$$\begin{aligned} u_1(t) &= A_1 \sqrt{\mu_1} \cos(\Omega_1 t + \varphi_1), \\ u_2(t) &= A_2 \sqrt{\mu_2} \cos(\Omega_2 t + \varphi_2), \\ u_3(t) &= A_3 \sqrt{\mu_3} \cos(\Omega_3 t + \varphi_3). \end{aligned} \quad (2.372)$$



Ukážeme, že v případě

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = m,$$

budou platit podmínky (2.292) a (2.293), tj.

$$m \frac{f_{1,n}f_{1,l} + f_{2,n}f_{2,l} + f_{3,n}f_{3,l}}{\sqrt{\mu_n\mu_l}} = \begin{cases} 1, & \text{když } l = n, \\ 0, & \text{když } l \neq n \end{cases} \quad (2.373)$$

a

$$\begin{aligned} & \frac{C_{11}f_{1,n}f_{1,l} + C_{12}(f_{1,n}f_{2,l} + f_{2,n}f_{1,l}) + C_{13}(f_{1,n}f_{3,l} + f_{3,n}f_{1,l})}{\sqrt{\mu_n\mu_l}} + \\ & + \frac{C_{23}(f_{2,n}f_{3,l} + f_{3,n}f_{2,l}) + C_{22}f_{2,n}f_{2,l} + C_{33}f_{3,n}f_{3,l}}{\sqrt{\mu_n\mu_l}} = \begin{cases} \Omega_n^2, & \text{když } l = n, \\ 0, & \text{když } l \neq n. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.374)$$

Do těchto vztahů budeme postupně dosazovat z (2.352), (2.355) a (2.358). Nejprve pro  $n = l = 1$ ,  $n = l = 2$  a  $n = l = 3$  podmínka (2.373) zřejmě vyjadřuje vztahy (2.351), (2.354) a (2.357):

$$f_{1,1}^2 + f_{2,1}^2 + f_{3,1}^2 = f_{1,3}^2 + f_{2,3}^2 + f_{3,3}^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = f_{1,2}^2 + f_{2,2}^2 + f_{3,2}^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Pro  $n = 1, l = 2$ ,  $n = 2, l = 1$ ,  $n = 1, l = 3$ ,  $n = 3, l = 1$ ,  $n = 2, l = 3$  a  $n = 3, l = 2$  zřejmě již odpovídá již uvedeným vztahům (2.359), (2.360) a (2.361).

I podmínky (2.374) jsou splněny: Pro  $n = l = 1$

$$\begin{aligned} & \frac{C_{11}f_{1,1}^2 + 2C_{12}f_{1,1}f_{2,1} + 2C_{13}f_{1,1}f_{3,1} + C_{22}f_{2,1}^2 + 2C_{23}f_{2,1}f_{3,1} + C_{33}f_{3,1}^2}{m} = \\ & = \frac{k/2 - k/\sqrt{2} + 0 + k - k/\sqrt{2} + k/2}{m} = \frac{(2 - \sqrt{2})k}{m} = \Omega_1^2. \end{aligned}$$

Pro  $n = l = 2$

$$\begin{aligned} & \frac{C_{11}f_{1,2}^2 + 2C_{12}f_{1,2}f_{2,2} + 2C_{13}f_{1,2}f_{3,2} + C_{22}f_{2,2}^2 + 2C_{23}f_{2,2}f_{3,2} + C_{33}f_{3,2}^2}{m} = \\ & = \frac{k + 0 + 0 + 0 + 0 + k}{m} = \frac{2k}{m} = \Omega_2^2. \end{aligned}$$

A pro  $n = l = 3$

$$\begin{aligned} & \frac{C_{11}f_{1,3}^2 + 2C_{12}f_{1,3}f_{2,3} + 2C_{13}f_{1,3}f_{3,3} + C_{22}f_{2,3}^2 + 2C_{23}f_{2,3}f_{3,3} + C_{33}f_{3,3}^2}{m} = \\ & = \frac{k/2 + k/\sqrt{2} + 0 + k + k/\sqrt{2} + k/2}{m} = \frac{(2 + \sqrt{2})k}{m} = \Omega_3^2. \end{aligned}$$

A konečně pro  $n = 1, l = 2$  a  $n = 2, l = 1$

$$\begin{aligned} & \frac{C_{11}f_{1,1}f_{1,2} + C_{12}(f_{1,1}f_{2,2} + f_{2,1}f_{1,2}) + C_{13}(f_{1,1}f_{3,2} + f_{3,1}f_{1,2})}{m} + \\ & + \frac{C_{23}(f_{2,1}f_{3,2} + f_{3,1}f_{2,2}) + C_{22}f_{2,1}f_{2,2} + C_{33}f_{3,1}f_{3,2}}{m} = \\ & = \frac{k/\sqrt{2} - k/2 + 0 + k/2 + 0 - k/\sqrt{2}}{m} = 0. \end{aligned}$$

Pro  $n = 1, l = 3$  a  $n = 3, l = 1$

$$\begin{aligned} & \frac{C_{11}f_{1,1}f_{1,3} + C_{12}(f_{1,1}f_{2,3} + f_{2,1}f_{1,3}) + C_{13}(f_{1,1}f_{3,3} + f_{3,1}f_{1,3})}{m} + \\ & + \frac{C_{23}(f_{2,1}f_{3,3} + f_{3,1}f_{2,3}) + C_{22}f_{2,1}f_{2,3} + C_{33}f_{3,1}f_{3,3}}{m} = \\ & = \frac{k/2 + 0 + 0 + 0 - k + k/2}{m} = 0. \end{aligned}$$

A pro  $n = 2, l = 3$  a  $n = 3, l = 2$

$$\begin{aligned} & \frac{C_{11}f_{1,2}f_{1,3} + C_{12}(f_{1,2}f_{2,3} + f_{2,2}f_{1,3}) + C_{13}(f_{1,2}f_{3,3} + f_{3,2}f_{1,3})}{m} + \\ & + \frac{C_{23}(f_{2,2}f_{3,3} + f_{3,2}f_{2,3}) + C_{22}f_{2,2}f_{2,3} + C_{33}f_{3,2}f_{3,3}}{m} = \\ & = \frac{k/\sqrt{2} + k/2 + 0 - k/2 + 0 - k/\sqrt{2}}{m} = 0. \end{aligned}$$

Normální souřadnice tedy nalézáme v tomto tvaru

$$\begin{aligned} u_1(t) &= A_1\sqrt{m}\cos(\Omega_1t + \varphi_1), \\ u_2(t) &= A_2\sqrt{m}\cos(\Omega_2t + \varphi_2), \\ u_3(t) &= A_3\sqrt{m}\cos(\Omega_3t + \varphi_3), \end{aligned} \tag{2.375}$$

přičemž podle (2.362), (2.363) a (2.364) pro ně platí

$$\begin{aligned} u_1(t) &= \frac{1}{2}\sqrt{m}(x_1 + x_2\sqrt{2} + x_3), \\ u_2(t) &= \sqrt{\frac{m}{2}}(x_1 - x_3), \\ u_3(t) &= \frac{1}{2}\sqrt{m}(x_1 - x_2\sqrt{2} + x_3). \end{aligned}$$

Po vyjádření časových derivací normálních souřadnic (2.375) lze pak ukázat, že celková mechanická energie (2.294) této soustavy vyjde

$$E = \frac{1}{2}\dot{u}_1^2 + \frac{1}{2}\dot{u}_2^2 + \frac{1}{2}\dot{u}_3^2 + \frac{1}{2}\Omega_1^2u_1^2 + \frac{1}{2}\Omega_2^2u_2^2 + \frac{1}{2}\Omega_3^2u_3^2 = \frac{1}{2}m(\Omega_1^2A_1^2 + \Omega_2^2A_2^2 + \Omega_3^2A_3^2) \tag{2.376}$$

a je podle očekávání konstantní.

# Kapitola 3

## Dodatky

### Dodatek A: Některé vlastnosti funkcí více proměnných

Zopakujeme některé vlastnosti reálných funkcí více reálných proměnných z hlediska diferenciálního počtu. Pro detailní studium funkcí více proměnných doporučujeme některou z mnoha skvělých matematických učebnic.<sup>1</sup>

Ze základního kurzu matematiky víme, že funkce více proměnných je způsob přiřazení jedné hodnoty, kterou označíme např.  $f$ , uspořádané  $N$ -tici proměnných, např.  $x_1, x_2, \dots, x_N$ , a zapisujeme ji takto

$$f(x_1, x_2, \dots, x_N) \equiv f(x_i) \quad (i = 1, 2, \dots, N).$$

Úsporného zápisu uvedeného za symbolem „ $\equiv$ “ budeme užívat velmi často. Pokud to bude možné, nebudeme dále již ani uvádět, jakých hodnot index nabývá. Danou funkci tedy budeme označovat pouze následujícím zápisem:<sup>2</sup>  $f(x_i)$ .

Někdy se však budeme zabývat jednou z proměnných (např.  $x_l$  s konkrétním indexem  $l$ ) anebo souborem proměnných (např.  $x_k$ , kde  $k = M + 1, M + 2, \dots, N$ ) v souvislosti s jiným souborem proměnných (např.  $x_j$ , kde  $j = 1, 2, \dots, M$ ). V takovém případě budeme důsledně výtchy hodnot indexů uvádět.

#### A.1 Nezávislé a závislé proměnné

Pokud hodnoty každé z proměnných  $x_i$  můžeme měnit zvlášť, aniž by to mělo vliv na hodnoty ostatních proměnných, říkáme, že jde o *nezávislé proměnné*. Jejich hodnoty potom můžeme vynášet na osy souřadného systému definovaného v  $N$ -rozměrném prostoru. Nezávislost proměnných  $x_i$  se projeví tím, že všechny osy jsou navzájem kolmé a o takovém souřadném systému potom říkáme, že je ortogonální.<sup>3</sup> Vektor  $\mathbf{r} = (x_1, x_2, \dots, x_N) \equiv (x_i)$  jednoznačně určuje v tomto souřadném systému polohu bodu, který označíme  $P$ , a naopak bod  $P$  jednoznačně určuje hodnoty všech proměnných  $x_i$ .

Definičním oborem funkce  $f$  je množina všech hodnot proměnných  $x_i$ , pro které je funkce definována. Geometricky je definiční obor reprezentován nějakým  $N$ -rozměrným tělesem (může sestávat z více oddělených oblastí), kterou projde bod  $P$ , pokud všem proměnným postupně přiřadíme všechny hodnoty z definičního oboru. Tomuto tělesu budeme říkat *definiční oblast*.

<sup>1</sup>Např.:

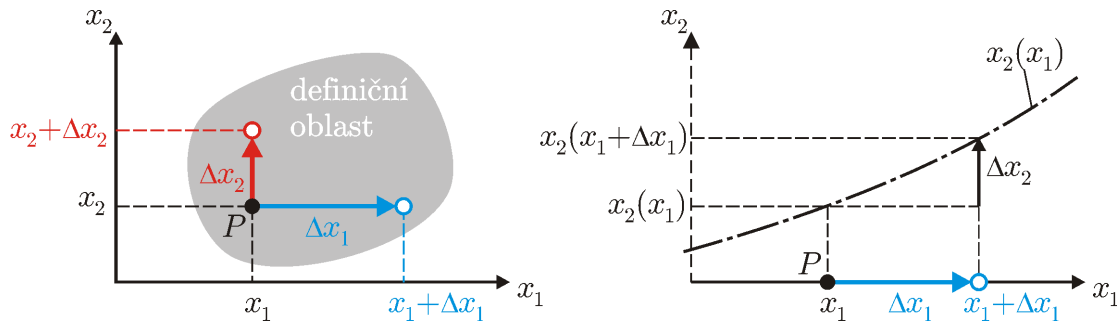
J. Musilová, P. Musilová: Matematika pro porozumění a praxi II. VUTIUM, Brno 2012, kap. 9,

K. Rektorys: Přehled užité matematiky I. Prometheus, Praha 1995, kap. 12.

<sup>2</sup>V mnohých textech by se taková funkce zapsala dokonce i zkráceněji:  $f(x)$ .

<sup>3</sup>V řečtině se výraz „pravoúhlý“ vyjadřuje slovem *ορθογώνιος* (vysl. ortogónios).

**Příklad 3.1** Na obr. 3.1 vlevo je ukázán příklad vynesení hodnot dvou nezávislých proměnných  $x_1$  a  $x_2$  ( $N = 2$ ) do dvourozměrného ortogonálního souřadného systému. Poloha bodu  $P$  je dána vektorem  $\mathbf{r} = (x_1, x_2)$ . Změny hodnot  $x_1$  a  $x_2$  můžeme provádět libovolně a každé takové změně náleží posunutí bodu  $P$ . Jsou ukázány dva případy: změna  $x_1$  o  $\Delta x_1$  se současným zachováním hodnoty  $x_2$  (označeno modře) a změna  $x_2$  o  $\Delta x_2$  se současným zachováním hodnoty  $x_1$  (označeno červeně). Je zřejmé, že se bod  $P$  může obecně libovolně přemisťovat v naznačené definiční oblasti podle konkrétních změn hodnot proměnných  $x_1$  a  $x_2$ . Definiční oblastí bude v tomto případě nějaká rovinná oblast (popř. sjednocení oblastí) popsaná v souřadném systému s osami  $x_1$  a  $x_2$ .



Obrázek 3.1: Vlevo: Vynesení bodu  $P$  určeným dvěma nezávislými proměnnými  $x_1$  a  $x_2$ . Jsou ukázány dva příklady posunutí (modře a červeně) bodu  $P$  po naznačené definiční oblasti. Vpravo: Příklad závislé proměnné  $x_2$  na  $x_1$  a vynesení bodu  $P$  na ose  $x_1$ .

Je-li však některá z proměnných  $x_i$  závislá na jiných, znamená to, že existuje jednoznačné přiřazení hodnoty této proměnné, kterou označíme  $x_k$ , hodnotám zbývajících proměnných  $x_i$ , kde  $i$  nabývá hodnot  $1, 2, \dots, N$  vyjma  $k$ . Toto přiřazení lze vyjádřit tak, že  $x_k$  je obecně funkcí všech zbývajících proměnných  $x_i$ , neboli

$$x_k \equiv x_k(x_i), \text{ pro všechna } i \neq k. \quad (3.1)$$

Tím ovšem zároveň říkáme, že zadáme-li hodnoty všech zbývajících proměnných  $x_i$ , již automaticky známe hodnotu proměnné  $x_k$ , pokud je známa funkce (3.1). Tím se redukuje počet nezávislých proměnných na  $N - 1$ . Je zřejmé, že každá další závislá proměnná dále snižuje počet nezávislých proměnných o jedničku. Počet závislých proměnných  $Z$  z celkového počtu  $N$  znamená  $N - Z$  nezávislých proměnných. Jejich hodnoty tedy nyní stačí vynášet pouze na  $N - Z$  os ortogonálního souřadného systému zavedeného v prostoru dimenze  $N - Z$ .

Problém souboru  $N$  proměnných, z nichž  $Z$  je závislých na zbývajících proměnných, tak lze zredukovat na soubor  $M = N - Z$  nezávislých proměnných následujícím způsobem: zavedeme index  $j = 1, 2, \dots, M$  a označíme jím postupně všechny nezávislé proměnné. Dále zavedeme index  $k = M + 1, M + 2, \dots, N$  a označíme jím zbylé závislé proměnné, které jsou potom dány funkcemi  $x_k(x_j)$ , kde  $k$  prochází všemi indexy závislých proměnných a  $j$  všemi indexy nezávislých proměnných.

**Příklad 3.2** Obr. 3.1 vpravo ukazuje příklad, kdy jedna ze dvou proměnných je závislá na druhé, v tomto případě existuje funkce  $x_2(x_1)$ . Potom se původní dvourozměrný prostor s osami  $x_1$  a  $x_2$  redukuje na prostor jednorozměrný, kde je definován souřadný systém s jedinou osou  $x_1$ . Změna hodnoty  $x_1$  o  $\Delta x_1$  jednoznačně určuje změnu hodnoty  $x_2$ . Je vidět, že se nyní bod  $P$  může libovolně přemisťovat pouze v jednorozměrném prostoru.

V dalším budeme u všech funkcí předpokládat pouze nezávislé proměnné, budeme je nadále označovat symboly  $x_j$  a jejich počet bude vyjádřen přirozeným číslem  $M$ .

## A.2 Graf funkce více proměnných a úplný diferenciál funkce

Grafem funkce  $f(x_j)$  je geometrický útvar v nadprostoru dimenze  $M + 1$ , ve kterém definujeme ortogonální souřadný systém s  $M + 1$  navzájem kolmými osami. Na  $M$  osách vynášíme jednotlivé proměnné  $x_j$  tak, že v tomto  $M$  rozměrném prostoru vznikne bod  $P$  o polohovém vektoru  $\mathbf{r} = (x_j)$  (tento bod jsme zavedli v předešlém odstavci). Na zbývajících  $(M + 1)$ -ou osu vyneseme funkční hodnotu  $f(x_j)$ .

**Příklad 3.3** Na obr. 3.2 vlevo je ukázán příklad grafu funkce jedné proměnné  $f(x_1)$  ( $M = 1$ ). Osa  $x_1$  je zavedena v jednorozměrném prostoru, ve kterém hodnota proměnné  $x_1$  určuje bod  $P$  o polohovém vektoru s jedinou složkou  $(x_1)$  znázorněný černým kroužkem. V nadprostoru dimenze  $M + 1 = 2$  zavedeme druhou osu kolmou k ose  $x_1$  a na ni vynášíme funkční hodnotu funkce  $f(x_1)$ . Ve dvourozměrném nadprostoru tedy vznikne bod  $Q$  znázorněný červeným kroužkem. Množina všech takových bodů  $Q$  pro různé hodnoty  $x_1$  tvoří graf funkce  $f(x_1)$ . Vzhledem k tomu, že v tomto případě  $M = 1$ , grafem této funkce je křivka, která představuje jednorozměrný geometrický útvar v dvojrozměrném prostoru. Definiční oblastí je v tomto případě jednorozměrné těleso, tedy nějaká úsečka (popř. úsečky), polopřímka (popř. polopřímky), či všechny body na ose  $x_1$ .

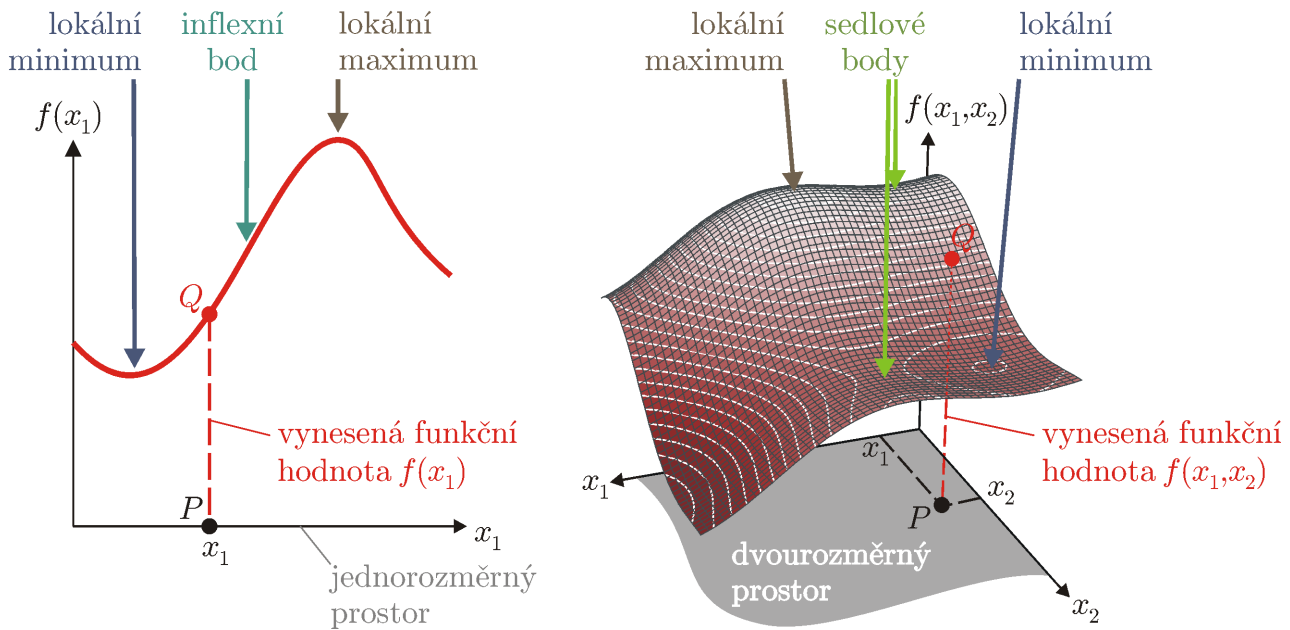
**Příklad 3.4** Na obr. 3.2 vpravo je ukázán příklad grafu funkce dvou nezávislých proměnných  $f(x_1, x_2)$  ( $M = 2$ ). Ve dvourozměrném prostoru je zaveden souřadný systém s navzájem kolmými osami  $x_1$  a  $x_2$ . V tomto souřadném systému hodnoty proměnných  $x_1$  a  $x_2$  určují bod  $P$  o polohovém vektoru  $\mathbf{r} = (x_1, x_2)$  (znázorněný černým kroužkem). V nadprostoru dimenze  $M + 1 = 3$  zavedeme další osu kolmou k oběma předchozím a na ni vynášíme funkční hodnotu funkce  $f(x_1, x_2)$ . V tomto trojrozměrném nadprostoru opět vznikne bod  $Q$  (znázorněný červeným kroužkem). Množina všech takových bodů  $Q$  pro různé hodnoty  $x_1$  a  $x_2$  tvoří graf funkce  $f(x_1, x_2)$ . Grafem této funkce je plocha jako dvourozměrný geometrický útvar v trojrozměrném prostoru. Definiční oblastí je nyní nějaká rovinná oblast (popř. oblasti) v dvourozměrném prostoru, kde je definován ortogonální souřadný systém s osami  $x_1$  a  $x_2$ .

Tušíme, že v případě tří nezávislých proměnných bude grafem funkce trojrozměrné těleso ve čtyřrozměrném nadprostoru a definiční oblastí bude trojrozměrné těleso (popř. trojrozměrná tělesa) v trojrozměrném prostoru, kde je definován ortogonální souřadný systém s osami  $x_1$ ,  $x_2$  a  $x_3$ . Takhle bychom mohli postupovat dále k funkcím libovolného počtu nezávislých proměnných.

### Úplný diferenciál funkce

V dalším textu budeme vždy pracovat pouze s takovými funkcemi více proměnných, které jsou v daném bodě a jeho blízkém okolí spojité i s jejich parciálními derivacemi prvního řádu podle všech proměnných. Takovým funkcím se říká *diferencovatelné funkce* a platí pro ně toto: změni-li se jednotlivé nezávislé proměnné  $x_j$  o libovolné infinitezimální hodnoty  $dx_j$ , výsledná infinitezimální změna  $df$  funkční hodnoty  $f$  diferencovatelné funkce je rovna tzv. *úplnému (totálnímu) diferenciálu* ve tvaru

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_M} dx_M = \sum_{j=1}^M \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j. \quad (3.2)$$



Obrázek 3.2: Vlevo: Příklad grafu funkce jedné proměnné  $f(x_1)$ . Vpravo: Příklad grafu funkce dvou nezávislých proměnných  $f(x_1, x_2)$ .

*Gradient* diferencovatelné funkce  $f$  v daném bodě je definován jako vektor, jehož složky jsou rovny parciálním derivacím funkce  $f$  podle všech proměnných  $x_j$ :

$$\nabla f \equiv \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_M} \right) \equiv \left( \frac{\partial f}{\partial x_j} \right). \quad (3.3)$$

Dále zavedeme *vektor (infinitesimálního) posunutí*, jehož složky jsou rovny infinitesimálním změnám jednotlivých proměnných  $dx_j$ :

$$d\mathbf{r} = (dx_1, dx_2, \dots, dx_M) \equiv (dx_j).$$

Je zřejmé, že úplný diferenciál (3.2) pak můžeme přepsat do tvaru

$$df = \nabla f \cdot d\mathbf{r}. \quad (3.4)$$

Mohou (ale nemusí) existovat speciální hodnoty  $x_{e,j}$  jednotlivých proměnných, které určují bod o polohovém vektoru  $\mathbf{r}_e = (x_{e,j})$ , v němž platí

$$df(\mathbf{r}_e) = \sum_{k=1}^M \frac{\partial f}{\partial x_k} \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_e} dx_k = 0. \quad (3.5)$$

To znamená, že v tomto bodě nedojde ke změně funkční hodnoty při infinitesimální změně hodnoty kterékoli proměnné  $x_j$ . To nastává v bodech, kterým říkáme *stacionární body funkce* a takovým bodem může být např. lokální minimum, lokální maximum, či sedlový bod. Příklady těchto bodů jsou ukázány na obr. 3.2 vpravo.

Z (3.5) a z faktu, že proměnné  $x_j$  jsou nezávislé, plynou pro stacionární body funkce  $f$  následující podmínky, které musí všechny zároveň platit:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_e} = 0 \text{ pro každé } j. \quad (3.6)$$

Na první pohled se zdá, že současná nulovost každé z parciálních derivací je příliš silný požadavek. Stačilo by přece, aby řada vyjádřená sumou v (3.5) obsahovala takové (nenulové) členy, které se navzájem vyruší. Proto je vhodné nyní krátce rozebrat úvahy, ze kterých závěr (3.6) plyne.

Pokud pro některou z parciálních derivací, např. podle proměnné  $x_m$ , platí

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x_m} \right|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_e} \neq 0,$$

potom infinitezimální změna  $dx_m$  proměnné  $x_m$  způsobí nenulovou infinitezimální změnu  $df$  funkční hodnoty, neboť v takovém případě

$$df(\mathbf{r}_e) = \left. \frac{\partial f}{\partial x_m} \right|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_e} dx_m \neq 0.$$

Mohlo by se ale zdát, že by se tato situace dala „zachránit“ tak, že i jiná z parciálních derivací by byla nenulová, např.

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x_n} \right|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_e} \neq 0$$

tak, aby nakonec platilo

$$df(\mathbf{r}_e) = \left. \frac{\partial f}{\partial x_m} \right|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_e} dx_m + \left. \frac{\partial f}{\partial x_n} \right|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_e} dx_n = 0.$$

To by ale znamenalo, že by musela být infinitezimální změna  $dx_m$  zcela svázána s infinitezimální změnou  $dx_n$  tak, aby oba členy měly opačné znaménko, a zároveň, aby jejich absolutní hodnoty si byly rovny. Tím bychom ovšem říkali, že proměnné  $x_m$  a  $x_n$  jsou na sobě závislé. Protože považujeme všechny proměnné za nezávislé, nelze na příležitostné vyrušení nenulových členů řady „spoléhat“ ve všech případech. Proto je nulovost  $df(\mathbf{r}_e)$  vždy zajištěna jen tehdy, když jsou všechny parciální derivace bez výjimky nulové, jak říká vztah (3.6). Tyto úvahy jsou nesmírně důležité ve variačních úlohách, kterými se budeme později zabývat.

### A.3 Pořadí u smíšených parciálních derivací

Věnujme se následujícímu křivkovému integrálu

$$\int_{A,c'}^B df, \quad (3.7)$$

kde  $A$  a  $B$  jsou body náležející definiční oblasti v prostoru dimenze  $M$ . Symbolem  $c'$  se rozumí křivka v tomto prostoru, jejíž krajní body jsou  $A$  a  $B$ . Tato křivka (včetně počátečního a koncového bodu) probíhá pouze definiční oblastí, a navíc ve všech bodech křivky je funkce  $f$  diferencovatelná. Této křivce, po níž integrujeme, budeme říkat *integrační cesta*. Poloha bodu  $A$  je dána vektorem  $(x_{A,1}; x_{A,2}; \dots; x_{A,M}) \equiv (x_{A,j})$ , poloha bodu  $B$  vektorem  $(x_{B,1}; x_{B,2}; \dots; x_{B,M}) \equiv (x_{B,j})$ . Je zřejmé, že integrál (3.7) představuje součet infinitezimálních změn funkce  $f(x_j)$ , postupujeme-li po křivce  $c'$  od bodu  $A$  k bodu  $B$ . Výsledkem tedy musí být rozdíl jejich funkčních hodnot v krajních bodech, tedy

$$\int_{A,c'}^B df = f(x_{B,j}) - f(x_{A,j}) = \Delta f.$$

Zkoumejme nyní integrál

$$\int_{A,c''}^B df,$$

kde  $A$  a  $B$  jsou stejné body v prostoru dimenze  $M$ , jako v předchozím případě. Křivka  $c''$  se od křivky  $c'$  liší, stále však probíhá pouze body, ve kterých je funkce  $f$  diferencovatelná. Integrační cesty jsou tedy různé, avšak mají společný počáteční a koncový bod. V takovém případě musí platit

$$\int_{A,c''}^B df = f(x_{B,j}) - f(x_{A,j}) = \Delta f,$$

neboli

$$\int_{A,c'}^B df = \int_{A,c''}^B df. \quad (3.8)$$

Tento vztah říká, že v případě shodných počátečních a koncových bodů je hodnota křivkových integrálů vždy rovna téže hodnotě bez ohledu na cestu, po které je integrace prováděna. Tyto úvahy nás vedou ještě dále: bude-li integrační cestou libovolná uzavřená křivka, kterou označíme  $c$ , počáteční bod bude totožný s koncovým bodem a bude tudíž platit

$$\oint_c df = 0.$$

Užijeme-li vyjádření  $df$  pomocí vztahu (3.4), lze tento integrál přepsat do tvaru

$$\oint_c \nabla f \cdot d\mathbf{r} = 0. \quad (3.9)$$

Nyní předpokládejme, že uzavřená křivka  $c$  byla vytvořena postupnými změnami pouze dvou proměnných s konkrétními indexy  $k$  a  $l$ . Všechny zbývající proměnné považujeme za konstantní. Úplný diferenciál funkce  $f$  obecně popsany vztahem (3.4) je tedy v tomto případě vyjádřen takto:

$$df = \nabla f \cdot d\mathbf{r} = \left( \frac{\partial f}{\partial x_k}, \frac{\partial f}{\partial x_l} \right) \cdot (dx_k, dx_l) = \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k + \frac{\partial f}{\partial x_l} dx_l. \quad (3.10)$$

Křivku  $c$  pak můžeme znázornit ve dvourozměrném prostoru se souřadným systémem tvořeným dvěma navzájem kolmými osami, které označíme  $x_k$  a  $x_l$ . Je zřejmé, že tato křivka je rovinná (všechny její body náležejí téže rovině). Dále je zřejmé, že existuje jediná plocha, která je křivkou obepínána a kterou označíme  $S$ . Říkáme že křivka  $c$  je hranicí plochy  $S$ . Příklad takové plochy  $S$ , jejíž hranicí je uzavřená křivka  $c$ , je ukázán na obr. 3.3.

Předpokládejme, že funkce  $f$  je diferencovatelná nejen ve všech bodech<sup>4</sup> křivky  $c$ , ale i ve všech bodech plochy  $S$ . Užitím (3.10) lze pak integrál (3.9) přepsat pomocí Greenovy věty na plošný integrál po ploše  $S$ :

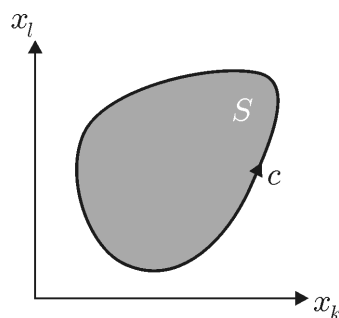
$$\oint_c \nabla f \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \left[ \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial f}{\partial x_l} \right) - \frac{\partial}{\partial x_l} \left( \frac{\partial f}{\partial x_k} \right) \right] dS. \quad (3.11)$$

S ohledem na (3.9) musí tedy platit:

$$\iint_S \left[ \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial f}{\partial x_l} \right) - \frac{\partial}{\partial x_l} \left( \frac{\partial f}{\partial x_k} \right) \right] dS = 0. \quad (3.12)$$

<sup>4</sup>Připomínáme, že bod není dán pouze hodnotami proměnných  $x_k$  a  $x_l$ , ale také všemi ostatními proměnnými, které se nyní považují za konstantní.





Obrázek 3.3: Příklad uzavřené rovinné křivky  $c$ , která obepíná plochu  $S$  (šedá oblast) a tvoří tak její hranici.

Zkoumejme, kdy bude uvedený plošný integrál roven nule. Můžeme předpokládat, že integrand bude mít natolik speciální tvar, že v některých částech plochy  $S$  bude záporný a v jiných kladný tak, aby byl integrál nakonec nulový. Vztah (3.9) ale platí pro libovolnou uzavřenou křivku  $c$  a tudíž i libovolnou plochu  $S$ , kterou tato křivka. Nelze se tudíž spolehnout na to, že se integrand bude „automaticky přizpůsobovat“ tomu, jakou plochu  $S$  (křivku  $c$ ) zvolíme.<sup>5</sup> Dospíváme tak k závěru, že, má-li být integrál (3.12) nulový vždy bez ohledu na volbu integrační oblasti, musí být integrand identicky roven nule ve všech bodech plochy  $S$ . Platí tedy

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial f}{\partial x_l} \right) = \frac{\partial}{\partial x_l} \left( \frac{\partial f}{\partial x_k} \right). \quad (3.13)$$

Toto vyjádření říká, že, pokud je funkce  $f$  v daném bodě diferencovatelná, je lhostejné, zda ji nejprve parciálně derivujeme podle  $x_l$  a potom podle  $x_k$  nebo naopak. Výsledek je vždy stejný. Vzhledem k tomu, že jsme nekladli žádné podmínky pro hodnoty indexů  $k$  a  $l$ , vztah (3.13) platí pro libovolnou dvojici (nezávislých) proměnných.

**Příklad 3.5** Ukážeme, že nezáleží na pořadí smíšených parciálních derivací funkce

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{x_1^2 - x_2^2} \ln x_3$$

ve všech bodech, ve kterých je diferencovatelná. Její definiční obor je zřejmě určen následujícími nerovnostmi:

$$|x_1| \geq |x_2| \quad \text{a zároveň} \quad x_3 > 0.$$

Definiční oblast této funkce je ukázána na obr. 3.4.

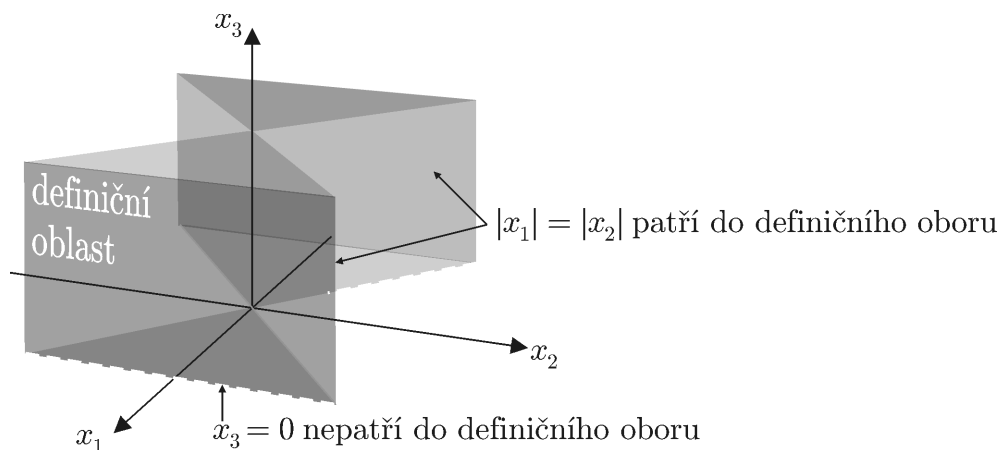
Všechny tři parciální derivace prvního řádu této funkce jsou

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 - x_2^2}} \ln x_3, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = -\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 - x_2^2}} \ln x_3, \quad \frac{\partial f}{\partial x_3} = \frac{\sqrt{x_1^2 - x_2^2}}{x_3}.$$

Funkce  $f(x_1, x_2, x_3)$  je tedy diferencovatelná ve všech bodech definičního oboru vyjma bodů, pro které platí

$$|x_1| = |x_2|.$$

<sup>5</sup>Podobné úvahy jsme prováděli v předchozím odstavci při hledání podmínek pro stacionární bod funkce, viz vztah (3.6) a text níže.



Obrázek 3.4: Definiční oblast funkce  $f(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{x_1^2 - x_2^2} \ln x_3$ .

Nyní provedeme všechny smíšené parciální derivace s oběma pořadími v bodech, ve kterých je funkce  $f$  diferencovatelná ( $|x_1| > |x_2|$  a zároveň  $x_3 > 0$ ):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \right) &= -\frac{x_1 x_2 \ln x_3}{(x_1^2 - x_2^2)^{3/2}}, & \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial f}{\partial x_2} \right) &= -\frac{x_2 x_1 \ln x_3}{(x_1^2 - x_2^2)^{3/2}} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \right); \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \right) &= \frac{x_1}{x_3 \sqrt{x_1^2 - x_2^2}}, & \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial f}{\partial x_3} \right) &= \frac{x_1}{x_3 \sqrt{x_1^2 - x_2^2}} = \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \right); \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{\partial f}{\partial x_2} \right) &= -\frac{x_2}{x_3 \sqrt{x_1^2 - x_2^2}}, & \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial x_3} \right) &= -\frac{x_2}{x_3 \sqrt{x_1^2 - x_2^2}} = \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{\partial f}{\partial x_2} \right). \end{aligned}$$

Tím jsme ukázali, že ve všech bodech, ve kterých je daná funkce  $f(x_1, x_2, x_3)$  diferencovatelná, nezáleží na pořadí u smíšených parciálních derivací, jak říká vztah (3.13).

## Dodatek B: Některé vlastnosti komplexních čísel a komplexních funkcí

Komplexní číslo  $z$  je jednoznačně určeno dvěma čísly  $z'$  a  $z''$  z oboru reálných čísel a zapisujeme ho ve tvaru

$$z = z' + iz'', \quad (3.14)$$

kde „i“ je imaginární jednotka definovaná vztahem

$$i \equiv \sqrt{-1}. \quad (3.15)$$

Číslu  $z'$  říkáme reálná část komplexního čísla  $z$  a číslo  $z''$  je jeho imaginární částí. Matematický zápis reálné části nějakého komplexního čísla provedeme pomocí funkce  $\operatorname{Re}\{\}$ , imaginární část zapíšeme pomocí funkce  $\operatorname{Im}\{\}$ . Např. pro reálnou a imaginární část komplexního čísla  $z$  určeného vztahem (3.14) platí:

$$\operatorname{Re}\{z\} = z', \quad \operatorname{Im}\{z\} = z''.$$

S komplexním čísly počítáme pomocí stejných postupů jako s mnohočleny. Součet nebo rozdíl dvou komplexních čísel  $a$  a  $b$  vyjádříme takto:

$$a \pm b = (a' + ia'') \pm (b' + ib'') = (a' \pm b') + i(a'' \pm b'')$$

a tím poznáváme reálnou a imaginární část výsledného komplexního čísla:

$$\operatorname{Re}\{a \pm b\} = a' \pm b', \quad \operatorname{Im}\{a \pm b\} = a'' \pm b''.$$

Jinými slovy řečeno, reálná a imaginární část součtu nebo rozdílu dvou komplexních čísel je rovna součtu nebo rozdílu jejich reálných a imaginárních částí. Chceme-li vyjádřit součin  $a$  a  $b$ , pak budeme s pomocí (3.15) postupovat takto:

$$ab = (a' + ia'')(b' + ib'') = a'b' + ia'b'' + ia''b' + (i)^2 a''b'' = (a'b' - a''b'') + i(a'b'' + a''b').$$

Reálnou a imaginární částí součinu tedy jsou výrazy

$$\operatorname{Re}\{ab\} = a'b' - a''b'', \quad \operatorname{Im}\{ab\} = a'b'' + a''b'.$$

*Komplexně sdružené číslo* ke komplexnímu číslu  $z = z' + iz''$  značíme  $z^*$  a definujeme jej vztahem

$$z^* \equiv z' - iz'', \quad (3.16)$$

neboli platí

$$\operatorname{Re}\{z^*\} = z', \quad \operatorname{Im}\{z^*\} = -z''.$$

Součin komplexního čísla  $z$  s číslem  $z^*$  k němu komplexně sdruženým nazýváme *kvadrát modulu* komplexního čísla  $z$ , označujeme ho symbolem  $|z|^2$  a s pomocí (3.15) jej můžeme vyjádřit ve tvaru

$$|z|^2 \equiv zz^* = (z' + iz'')(z' - iz'') = z'^2 - (iz'')^2 = z'^2 + z''^2. \quad (3.17)$$

Kvadrátu modulu komplexního čísla můžeme využít např. při vyjádření podílu dvou komplexních čísel  $a$  a  $b$ :

$$\frac{a}{b} = \frac{a' + ia''}{b' + ib''}.$$

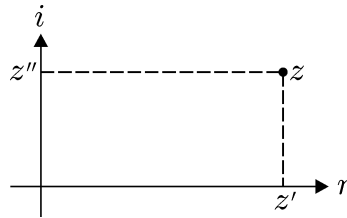
Abychom rozpoznali reálnou a imaginární část výsledku, celý zlomek rozšíříme číslem komplexně sdruženým ke jmenovateli:

$$\frac{a}{b} = \frac{a' + ia''}{b' + ib''} \frac{b' - ib''}{b' - ib''} = \frac{(a' + ia'')(b' - ib'')}{b'^2 + b''^2} = \frac{(a'b' + a''b'') + i(a''b' - a'b'')}{|b|^2}.$$

Nyní již vidíme, že

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{a}{b} \right\} = \frac{a'b' + a''b''}{|b|^2}, \quad \operatorname{Im} \left\{ \frac{a}{b} \right\} = \frac{a''b' - a'b''}{|b|^2}.$$

Geometricky můžeme dané komplexní číslo znázornit pomocí tzv. *komplexní (Gaussovy) roviny* určené dvěma navzájem kolmými osami. Na vodorovnou osu, kterou nazýváme *reálná osa* a označíme ji  $r$ , vyneseme reálnou část komplexního čísla, na svislou osu  $i$ , tzv. *imaginární osu*, vyneseme jeho imaginární část. Bod určený těmito dvěma souřadnicemi představuje geometrické znázornění daného komplexního čísla. Na obr. 3.5 je ukázáno geometrické znázornění komplexního čísla  $z$  určeného vztahem (3.14).



Obrázek 3.5: Geometrické znázornění komplexního čísla  $z$  podle vztahu (3.14).

## A.4 Exponenciální funkce komplexní proměnné

*Komplexní funkci* rozumíme přiřazení komplexního čísla danému komplexnímu číslu a zapisujeme ji obdobně jako samotná komplexní čísla:

$$f(z) = f'(z) + i f''(z) = f'(z', z'') + i f''(z', z''),$$

kde  $f'(z', z'')$  je reálná část komplexní funkce  $f(z)$  a  $f''(z', z'')$  je její imaginární část, neboli

$$\operatorname{Re}\{f(z)\} = f'(z', z''), \quad \operatorname{Im}\{f(z)\} = f''(z', z'').$$

Podobně, jako jsme definovali komplexně sdružené číslo  $z^*$  k číslu  $z$ , viz (3.16), můžeme definovat i komplexně sdruženou funkci  $f^*(z)$  k funkci  $f(z)$ :

$$f^*(z) \equiv f'(z', z'') - i f''(z', z''). \quad (3.18)$$

Kvadrát modulu dané komplexní funkce je reálná funkce komplexní proměnné  $z$  ve tvaru

$$|f(z)|^2 = [f'(z)]^2 + [f''(z)]^2 = f(z) f^*(z). \quad (3.19)$$

V dalším popíšeme některé hojně používané komplexní funkce. Exponenciální funkci s ryze imaginárním číslem v argumentu lze vyjádřit pomocí Eulerova vzorce. Pro jeho odvození nejprve napíšeme Taylorův rozvoj exponenciální funkce  $\exp(z)$  v bodě  $z = 0$ :

$$\exp(z) = 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4 + \frac{1}{120}z^5 + \frac{1}{720}z^6 + \frac{1}{5040}z^7 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad (3.20)$$

a Taylorových rozvoji funkcí  $\cos(\alpha)$  a  $\sin(\alpha)$  v bodě  $\alpha = 0$ :

$$\cos(\alpha) = 1 - \frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{1}{24}\alpha^4 - \frac{1}{720}\alpha^6 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\alpha^{2n}}{(2n)!}, \quad (3.21)$$

$$\sin(\alpha) = \alpha - \frac{1}{6}\alpha^3 + \frac{1}{120}\alpha^5 - \frac{1}{5040}\alpha^7 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\alpha^{2n+1}}{(2n+1)!}. \quad (3.22)$$

Nahradíme-li proměnnou  $z$  výrazem  $i\alpha$ , kde  $\alpha$  je reálné číslo, jednotlivé mocniny  $z^n$  pro  $n > 0$  vycházejí takto:

$$\begin{aligned} z &= i\alpha; & z^2 &= (i\alpha)^2 = -\alpha^2; & z^3 &= (i\alpha)^3 = -i\alpha^3; & z^4 &= (i\alpha)^4 = \alpha^4; \\ z^5 &= (i\alpha)^5 = i\alpha^5; & z^6 &= (i\alpha)^6 = -\alpha^6; & z^7 &= (i\alpha)^7 = -i\alpha^7; & \dots \end{aligned}$$

Tyto mocniny dále dosadíme do Taylorova rozvoje (3.20):

$$\exp(i\alpha) = 1 + i\alpha - \frac{1}{2}\alpha^2 - \frac{1}{6}i\alpha^3 + \frac{1}{24}\alpha^4 + \frac{1}{120}i\alpha^5 - \frac{1}{720}\alpha^6 - \frac{1}{5040}i\alpha^7 + \dots \quad (3.23)$$

a porovnáním tohoto výsledku s Taylorovými rozvoji (3.21) a (3.22) zjišťujeme, že platí

$$\exp(i\alpha) = \cos \alpha + i \sin \alpha,$$

což představuje *Eulerův vzorec*. Vidíme, že reálnou částí funkce  $\exp(i\alpha)$  je funkce  $\cos \alpha$  a imaginární částí  $\sin \alpha$ . To lze matematicky zapsat následujícím způsobem:

$$\operatorname{Re} \{ \exp(i\alpha) \} = \cos \alpha, \quad \operatorname{Im} \{ \exp(i\alpha) \} = \sin \alpha.$$

Vzhledem k tomu, že funkce kosinus je sudá, zatímco funkce sinus lichá, dále platí

$$\exp(\pm i\alpha) = \cos \alpha \pm i \sin \alpha. \quad (3.24)$$

Funkce  $\exp(i\alpha)$  a  $\exp(-i\alpha)$  jsou tedy komplexně sdruženými funkcemi a kvadrát modulu  $\exp(\pm i\alpha)$  je roven 1 bez ohledu na argument  $\alpha$ :

$$\exp(\pm i\alpha) \exp(\mp i\alpha) = \exp(\pm i\alpha \mp i\alpha) = 1.$$

Nyní již můžeme zapsat, čemu je rovna exponenciální funkce komplexní proměnné:

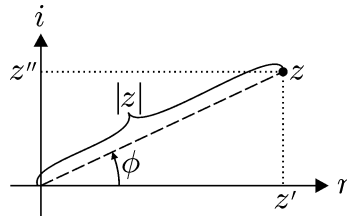
$$\begin{aligned} \exp(z) &= \exp(z' + iz'') = \exp(z') \exp(iz'') = \exp(z') [\cos(z'') + i \sin(z'')] = \\ &= \exp(z') \cos(z'') + i \exp(z') \sin(z''). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Platí tedy

$$\operatorname{Re} \{ \exp(z) \} = \exp(z') \cos(z''), \quad \operatorname{Im} \{ \exp(z) \} = \exp(z') \sin(z'').$$

## A.5 Vyjádření komplexního čísla pomocí exponenciální funkce

Na obr. 3.5 jsme viděli, že geometrické znázornění komplexního čísla  $z = z' + iz''$  využívá kartézských souřadnic  $z'$  a  $z''$  pro určení polohy bodu v rovině dané osami  $r$  a  $i$ . Ze základního kurzu analytické geometrie víme, že poloha bodu v rovině může být jednoznačně určena též pomocí polárních souřadnic. Vzdálenost bodu od počátku souřadného systému označme  $|z|$  a



Obrázek 3.6: Geometrické znázornění komplexního čísla  $z$  pomocí polárních souřadnic.

orientovaný úhel mezi průvodičem (spojnicí mezi daným bodem a počátkem) a osou  $r$  označme  $\phi$ , viz obr. 3.6.

Z definice kvadrátu modulu čísla  $z$ , viz (3.17), již vyplývá proč jsme vlastně vzdálenost bodu od počátku souřadného systému označili  $|z|$ :

$$|z| = \sqrt{z'^2 + z''^2} = \sqrt{|z|^2}. \quad (3.26)$$

Označení  $|z|$  se říká *velikost* nebo *modulus* čísla  $z$  a úhlu  $\phi$  jeho *fáze*. Z geometrie ukázané na obr. 3.6 dále vyplývá, že

$$z' = |z| \cos \phi, \quad z'' = |z| \sin \phi. \quad (3.27)$$

Komplexní číslo  $z$  určené vztahem (3.14) tak dále můžeme pomocí (3.24) vyjádřit ve tvaru

$$z = z' + iz'' = |z| \cos \phi + i|z| \sin \phi = |z| (\cos \phi + i \sin \phi) = |z| \exp(i\phi). \quad (3.28)$$

V předchozím odstavci jsme uvedli, že komplexní číslo je dáno dvěma reálnými čísly, reálnou částí  $z'$  a imaginární částí  $z''$ , viz (3.14). Na základě vyjádření (3.28) můžeme též říci, že komplexní číslo  $z$  je určeno jeho velikostí  $|z|$  a fází  $\phi$ .

Tento způsob vyjádření komplexního čísla má své výhody v jeho snadném geometrickém znázornění, avšak vede na následující nejednoznačnost: Komplexní číslo  $z$  lze vyjádřit pomocí nekonečně mnoha fází:

$$z = |z| \exp[i(\phi + 2\pi n)],$$

kde  $n$  je libovolné celé číslo. Tato nejednoznačnost se dá odstranit požadavkem, že fáze  $\phi$  nabývá hodnot pouze z intervalu  $\langle 0, 2\pi \rangle$ .

## A.6 Odmocnina z komplexního čísla

Exponenciální funkce komplexní proměnné lze využít i při vyjádření odmocniny z komplexního čísla  $z = z' + iz'' = |z| \exp(i\phi)$ :

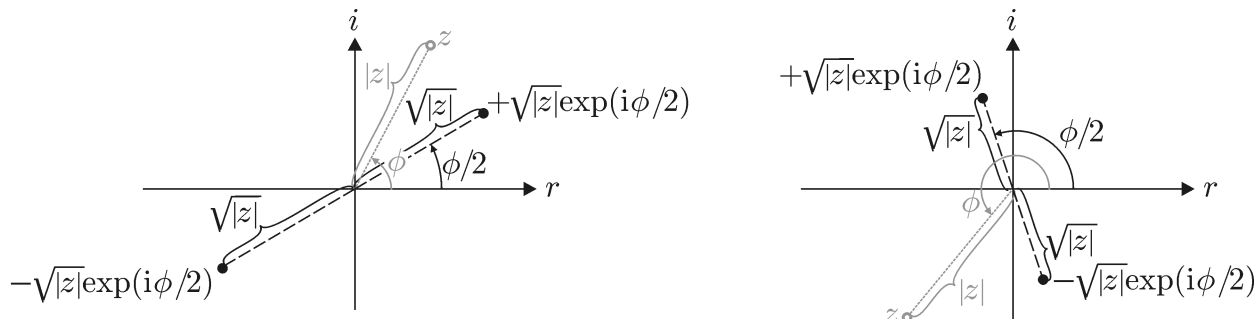
$$\pm \sqrt{z} = \pm \sqrt{|z| \exp(i\phi)} = \pm \sqrt{|z|} [\exp(i\phi)]^{1/2} = \pm \sqrt{|z|} \exp(i\phi/2). \quad (3.29)$$

Tento výsledek nás přivádí k jejímu snadnému geometrickému znázornění, které je ukázano na obr. 3.7. Nachází-li se bod reprezentující číslo  $z$  nad reálnou osou ( $z'' > 0$ ), oba body odpovídající  $\pm \sqrt{z}$  jsou v prvním a třetím kvadrantu, jak je znázorněno na obr. 3.7 vlevo. Je-li bod  $z$  pod reálnou osou ( $z'' < 0$ ), body  $\pm \sqrt{z}$  najdeme ve druhém a čtvrtém kvadrantu, viz obr. 3.7 vpravo. Pro znaménka reálných a imaginárních částí  $\pm \sqrt{z}$  tedy platí

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \{+\sqrt{z}\} > 0 \quad \wedge \quad \operatorname{Im} \{+\sqrt{z}\} > 0; \\ \operatorname{Re} \{-\sqrt{z}\} < 0 \quad \wedge \quad \operatorname{Im} \{-\sqrt{z}\} < 0, \quad \text{když } z'' > 0, \end{aligned} \quad (3.30)$$

a

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \{ +\sqrt{z} \} < 0 \quad \wedge \quad \operatorname{Im} \{ +\sqrt{z} \} > 0; \\ \operatorname{Re} \{ -\sqrt{z} \} > 0 \quad \wedge \quad \operatorname{Im} \{ -\sqrt{z} \} < 0, \quad \text{když } z'' < 0. \end{aligned} \quad (3.31)$$



Obrázek 3.7: Geometrické znázornění odmocniny z komplexního čísla  $z$ . Vlevo: ukázka, kdy  $z'' > 0$ , vpravo: ukázka, kdy  $z'' < 0$ .

Chceme-li znát hodnoty reálné a imaginární části, budeme pomocí (3.29) postupovat takto: Nejprve vyjádříme reálnou a imaginární část  $\exp(i\phi/2)$ , viz (3.24):

$$\exp(i\phi/2) = \cos(\phi/2) + i \sin(\phi/2). \quad (3.32)$$

Dále víme, že platí goniometrické vzorce

$$\cos^2(\phi/2) = \frac{1}{2} (1 + \cos \phi), \quad \sin^2(\phi/2) = \frac{1}{2} (1 - \cos \phi). \quad (3.33)$$

Potom užitím prvního ze vztahů (3.27) získáme vyjádření pro  $\cos \phi$

$$\cos \phi = \frac{z'}{|z|},$$

kteří dosadíme do (3.33) a výsledné výrazy s ohledem na (3.30) a (3.31) odmocníme:

$$\cos(\phi/2) = \pm \operatorname{sgn}(z'') \sqrt{\frac{1}{2} \left( 1 + \frac{z'}{|z|} \right)}, \quad \sin(\phi/2) = \pm \sqrt{\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{z'}{|z|} \right)}.$$

Nyní těchto vztahů využijeme ve výrazu (3.32)

$$\begin{aligned} \exp(i\phi/2) &= \pm \left[ \operatorname{sgn}(z'') \sqrt{\frac{1}{2} \left( 1 + \frac{z'}{|z|} \right)} + i \sqrt{\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{z'}{|z|} \right)} \right] = \\ &= \pm \frac{1}{\sqrt{|z|}} \left[ \operatorname{sgn}(z'') \sqrt{\frac{1}{2} (|z| + z')} + i \sqrt{\frac{1}{2} (|z| - z')} \right] \end{aligned}$$

a dosazením do (3.29) již dostáváme výsledek:

$$\pm \sqrt{z} = \pm \operatorname{sgn}(z'') \sqrt{\frac{1}{2} (|z| + z')} \pm i \sqrt{\frac{1}{2} (|z| - z')}. \quad (3.34)$$

## Dodatek C: Fourierova řada

Obecnou Fourierovou řadou se rozumí vyjádření obecně komplexní funkce  $f(x)$  definované na intervalu z oboru reálných čísel  $x \in \langle x_0, x_1 \rangle$  pomocí následující nekonečné řady:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x), \quad (3.35)$$

kde  $\varphi_n(x)$  jsou tzv. *bázové funkce* a  $a_n$  jsou jejich *amplitudy*. Protože  $f(x)$  je obecně komplexní funkcí (reálné proměnné  $x$ ), i bázové funkce  $\varphi_n(x)$  jsou obecně komplexními funkcemi a amplitudy  $a_n$  jsou obecně komplexními čísly.

Aby byla řada (3.35) Fourierovou řadou, musí bázové funkce  $\varphi_n(x)$  tvořit tzv. *úplný ortogonální systém funkcí*.

K jeho popisu však nejdříve potřebujeme na intervalu  $x \in \langle x_0, x_1 \rangle$  definovat *skalární součin dvou funkcí*  $g(x)$  a  $h(x)$ :

$$\langle g|h \rangle \equiv \int_{x_0}^{x_1} g^*(x)h(x) dx, \quad (3.36)$$

kde  $g^*(x)$  je komplexně sdružená funkce k funkci  $g(x)$ , viz (3.18). Lze ukázat, že pro skalární součin dvou funkcí platí komutativní zákon, tj.  $\langle g|h \rangle = \langle h|g \rangle$ . Skalární součin funkce  $g(x)$  se sebou samou potom napíšeme takto:

$$\langle g|g \rangle \equiv \int_{x_0}^{x_1} g^*(x)g(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} |g(x)|^2 dx, \quad (3.37)$$

kde jsme použili definici kvadrátu modulu  $|g(x)|^2$  funkce  $g(x)$ , viz (3.19). Je-li integrál (3.37) konečný, řekneme, že funkce  $g(x)$  je *kvadraticky integrovatelná*.

Nyní se můžeme vrátit zpět k vlastnostem bázových funkcí  $\varphi_n(x)$ . Ty tvoří ortogonální systém tehdy, pokud platí

$$\langle \varphi_n|\varphi_m \rangle = \int_{x_0}^{x_1} \varphi_n^*(x)\varphi_m(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{když } m \neq n, \\ c_n, & \text{když } m = n, \end{cases} \quad (n, m = 0, 1, 2, \dots), \quad (3.38)$$

kde všechna čísla  $c_n$  jsou konečná a nenulová. Pokud navíc platí, že

$$c_0 = c_1 = c_2 = \dots = 1,$$

řekneme, že systém bázových funkcí  $\varphi_n(x)$  je *ortonormální*. Aby byl ortogonální systém bázových funkcí  $\varphi_n(x)$  úplný, vyjádření (3.35) musí, až na případné body nespojitosti, platit pro libovolnou kvadraticky integrovatelnou funkci  $f(x)$  definovanou na intervalu  $x \in (x_0, x_1)$ .

Nyní zbývá určit amplitudy  $a_n$  ve Fourierově řadě (3.35). Ty získáme následujícím postupem. Nejprve vyjádříme skalární součin bázové funkce  $\varphi_n(x)$  s funkcí  $f(x)$ :

$$\langle \varphi_n|f \rangle = \int_{x_0}^{x_1} \varphi_n^*(x)f(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} \varphi_n^*(x) \left[ \sum_{m=0}^{\infty} a_m \varphi_m(x) \right] dx,$$

kde jsme zaměnili sumační index  $n$  za  $m$ . Vzhledem k tomu, že sčítáme přes  $m$ , můžeme funkci  $\varphi_n^*(x)$  přenést do sumy. Dále ještě můžeme zaměnit pořadí integrace a sumace:

$$\langle \varphi_n|f \rangle = \int_{x_0}^{x_1} \left[ \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_n^*(x)a_m \varphi_m(x) \right] dx = \sum_{m=0}^{\infty} \left[ \int_{x_0}^{x_1} \varphi_n^*(x)a_m \varphi_m(x) dx \right].$$



Nakonec vytkneme amplitudy  $a_m$  před integrál jako konstantu:

$$\langle \varphi_n | f \rangle = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \left[ \int_{x_0}^{x_1} \varphi_n^*(x) \varphi_m(x) dx \right] = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \langle \varphi_n | \varphi_m \rangle.$$

Protože platí podmínky ortogonality (3.38), všechny členy v sumě jsou rovny nule až na člen s  $m = n$ , který je roven  $c_n$ . Platí tedy

$$\langle \varphi_n | f \rangle = a_n c_n.$$

Toto můžeme provést s každou z básových funkcí  $\varphi_n(x)$ , tudíž všechny amplitudy  $a_n$  určíme podle vztahů

$$a_n = \frac{\langle \varphi_n | f \rangle}{c_n} = \frac{1}{c_n} \int_{x_0}^{x_1} \varphi_n^*(x) f(x) dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (3.39)$$

## A.7 Sinová řada

Nejčastěji používanými Fourierovými řadami jsou řady se sinovými básovými funkcemi. Nejprve ukážeme, že básová funkce<sup>6</sup>

$$\varphi_n(x) = \sin(n\pi x/l) \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (3.40)$$

tvoří ortogonální systém na intervalu  $x \in \langle 0, l \rangle$ , kde  $l > 0$ . Nyní ověříme podmínku ortogonality (3.38). Uvědomujeme si přitom, že platí  $\varphi_n^*(x) = \varphi_n(x)$ , neboť všechny básová funkce (3.40) jsou v tomto případě reálné. Nejdříve předpokládáme, že  $m \neq n$ :

$$\begin{aligned} \langle \varphi_n | \varphi_m \rangle &= \int_0^l \sin(n\pi x/l) \sin(m\pi x/l) dx = \\ &= \frac{\sin[(n-m)\pi x/l]}{2(n-m)\pi/l} - \frac{\sin[(n+m)\pi x/l]}{2(n+m)\pi/l} \Big|_0^l = 0 \quad (n, m = 1, 2, 3, \dots). \end{aligned}$$

Pro  $m = n$  naopak platí:

$$\langle \varphi_n | \varphi_n \rangle = \int_0^l \sin^2(n\pi x/l) dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2n\pi x/l)}{4n\pi/l} \Big|_0^l = \frac{l}{2} = c_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (3.41)$$

Čísla  $c_1 = c_2 = \dots = l/2$  jsou vskutku konečná a nenulová. Systém básových funkcí (3.40) je tedy opravdu ortogonální.

### Příklad vyjádření konstantní funkce sinovou řadou

Použití Fourierovy řady se sinovými básovými funkcemi ukážeme na příkladu, kdy chceme vyjádřit konstantní funkci

$$f(x) = f_0 \quad (3.42)$$

na intervalu  $x \in \langle 0, l \rangle$ . Víme, že amplitudy  $a_n$  obecné Fourierovy řady (3.35) získáme pomocí vztahů (3.39), tj. v tomto případě

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{c_n} \int_{x_0}^{x_1} \varphi_n^*(x) f(x) dx = \frac{2}{l} \int_0^l \sin(n\pi x/l) f_0 dx = \\ &= -\frac{2f_0 \cos(n\pi x/l)}{l \cdot n\pi/l} \Big|_0^l = \frac{2f_0}{n\pi} [1 - (-1)^n] \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \end{aligned}$$

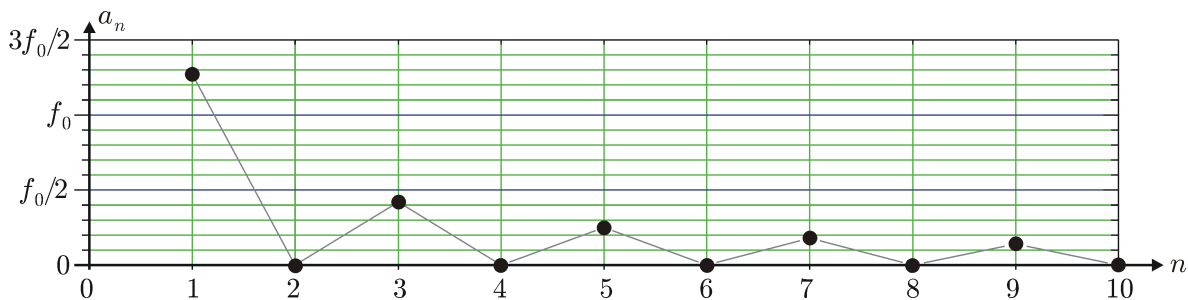
<sup>6</sup>Člen s  $n = 0$  vynecháváme, jelikož v tomto případě  $\varphi_0(x) = 0$ .

Vidíme, že pokud je  $n$  sudé, amplituda  $a_n$  je rovna nule, tedy

$$a_n = \frac{4f_0}{n\pi} \quad (n = 1, 3, 5, \dots), \quad (3.43)$$

$$a_n = 0 \quad (n = 2, 4, 6, \dots). \quad (3.44)$$

Hodnoty prvních 10 amplitud  $a_n$  jsou vyneseny do grafu na obr. 3.8. Vidíme, že sudé amplitudy jsou rovny nule a liché amplitudy se s rostoucím  $n$  limitně blíží nule. Znamená to, že každý další člen Fourierovy řady představuje stále menší příspěvek k celkovému výsledku a tedy říkáme, že Fourierova řada *konverguje*.



Obrázek 3.8: Hodnoty prvních 10 amplitud  $a_n$  podle (3.43) a (3.44).

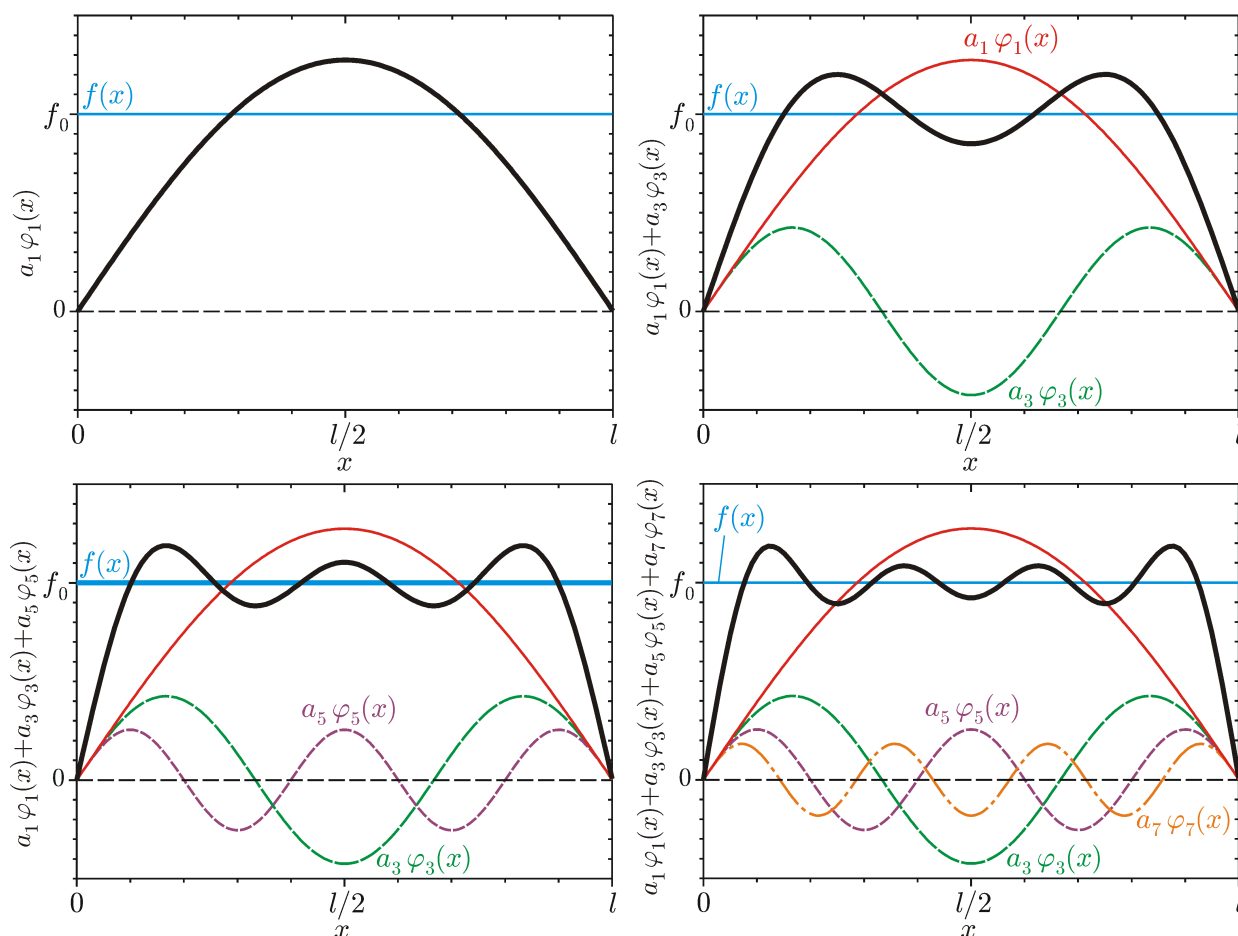
Funkci (3.42) tedy můžeme vyjádřit pomocí Fourierovy řady:

$$\begin{aligned} f(x) &= f_0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x) = a_1 \varphi_1(x) + a_3 \varphi_3(x) + a_5 \varphi_5(x) + \dots = \\ &= \frac{4f_0}{\pi} \sin(\pi x/l) + \frac{4f_0}{3\pi} \sin(3\pi x/l) + \frac{4f_0}{5\pi} \sin(5\pi x/l) + \dots \end{aligned} \quad (3.45)$$

Na obr. 3.9 je ukázáno postupné přičítání prvních 4 nenulových členů této Fourierovy řady. Je zřejmé, že přičtením dalších členů se bude konečná řada stále více blížit konstantní funkci  $f(x) = f_0$ . Celá nekonečná řada (3.40) potom bude zcela přesně rovna vyjádřené funkci.

Avšak všechny zvolené báze funkce  $\varphi_n(x) = \sin(n\pi x/l)$  nabývají nuly, když  $x = 0$  a  $x = l$ . Ve Fourierově řadě (3.45) tedy neexistuje člen, který by mohl výslednou nulovou hodnotu v těchto krajních bodech zvrátit. Proto říkáme, že vztah (3.40) platí pouze na otevřeném intervalu  $x \in (0, l)$ . Tato skutečnost je ukázána na obr. 3.10 vlevo. Vidíme, že zatímco uvnitř intervalu už součet prvních 4 nenulových členů Fourierovy řady (přerušovaná zelená křivka) „docela dobře“ vystihuje řadu celou (plná černá úsečka), u krajních bodů  $x = 0$  a  $x = l$  je aproximace zatím nedostačující. Říkáme, že mimo krajní body Fourierova řada *konverguje rychle*, zatímco v jejich blízkosti *konverguje pomalu*. V krajních bodech *nekonverguje vůbec*. Z toho důvodu někdy bývá výhodné využít jiného systému báze funkcí, jak uvidíme v dalším odstavci.

Řekli jsme sice, že funkce  $f(x) = f_0$  je definována pouze na intervalu  $x \in \langle 0, l \rangle$  a Fourierova řada (3.45) je s ní až na krajní body plně totožná. Avšak samotné báze funkce  $\varphi_n(x) = \sin(n\pi x/l)$  jsou definovány na celém intervalu  $x \in (-\infty, \infty)$ . Jaký má tedy Fourierova řada průběh mimo tento interval? Podle funkcí  $\sin(n\pi x/l)$  můžeme odhadnout, že bude periodická s periodou  $2l$  a její graf bude na intervalu  $x \in \langle 0, 2l \rangle$  antisymetrický vzhledem k  $x = l$ . Graf Fourierovy řady (3.45) mimo interval  $x \in \langle 0, l \rangle$  je ukázán na obr. 3.10 vpravo.



Obrázek 3.9: Grafy součtů prvních 4 nenulových členů Fourierovy řady (3.45) (silné černé křivky). Vlevo nahoře: první člen  $a_1\varphi_1(x)$ , vpravo nahoře:  $a_1\varphi_1(x) + a_3\varphi_3(x)$ , vlevo dole:  $a_1\varphi_1(x) + a_3\varphi_3(x) + a_5\varphi_5(x)$  a vpravo dole:  $a_1\varphi_1(x) + a_3\varphi_3(x) + a_5\varphi_5(x) + a_7\varphi_7(x)$ .

### Příklad vyjádření lineární funkce sinovou řadou

Vyjádříme pomocí Fourierovy řady sinových bázových funkcí (3.40) na intervalu  $x \in \langle 0, l \rangle$  lineární funkci

$$f(x) = Kx, \quad (3.46)$$

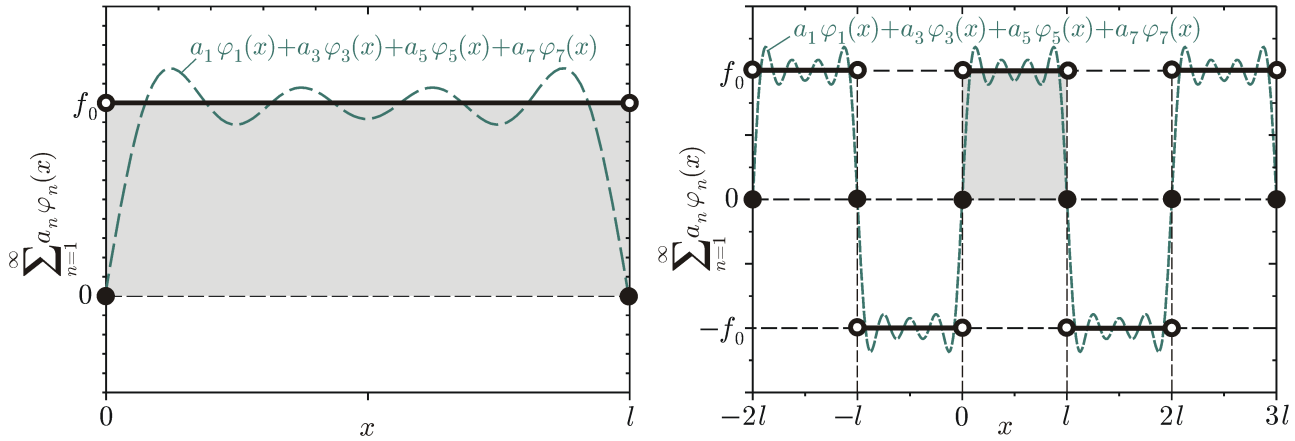
kde  $K$  je konstanta. Amplitudy  $a_n$  budou poodle vztahů (3.39) následující

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{c_n} \int_{x_0}^{x_1} \varphi_n^*(x) f(x) dx = \frac{2}{l} \int_0^l \sin(n\pi x/l) Kx dx = \\ &= \frac{2K}{l} \frac{\sin(n\pi x/l) - (n\pi x/l) \cos(n\pi x/l)}{(n\pi/l)^2} \Big|_0^l = -\frac{2Kl}{n\pi} (-1)^n \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \end{aligned}$$

Znaménka u amplitud pro jednotlivá  $n$  se tedy budou postupně střídat:

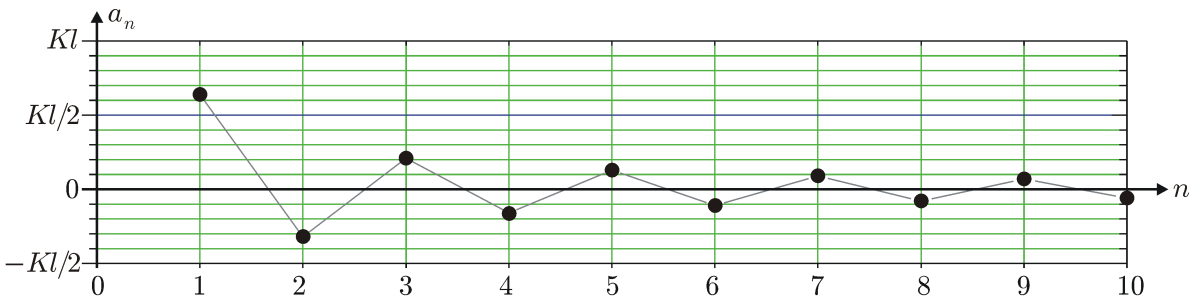
$$a_n = \frac{2Kl}{n\pi} \quad (n = 1, 3, 5, \dots), \quad (3.47)$$

$$a_n = -\frac{2Kl}{n\pi} \quad (n = 2, 4, 6, \dots). \quad (3.48)$$



Obrázek 3.10: Vlevo: Vztah (3.45) platí pouze na intervalu  $x \in (0, l)$ , neboť  $\varphi_n(0) = \varphi_n(l) = 0$  pro všechna  $n$ . Vpravo: Graf Fourierovy řady (3.45) mimo interval  $x \in \langle 0, l \rangle$  znázorněný šedými obdélníky v obou obrázcích.

V grafu na obr. 3.11 jsou vyneseny hodnoty prvních 10 amplitud  $a_n$ . Znaménka u sudých a lichých amplitud se střídají, ale  $a_n$  se s rostoucím  $n$  limitně blíží nule. Fourierova řada tedy opět konverguje.



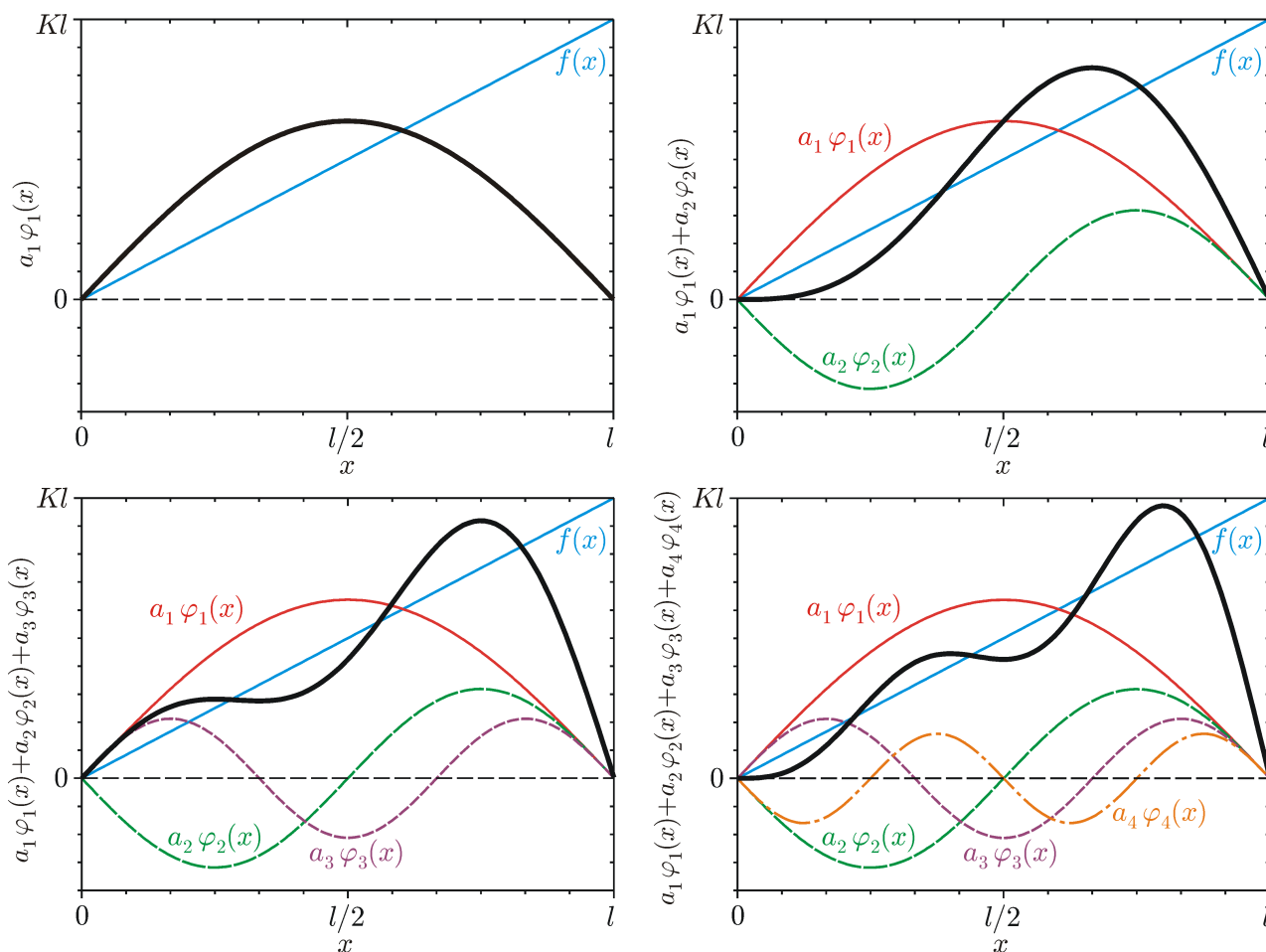
Obrázek 3.11: Hodnoty prvních 10 amplitud  $a_n$  podle (3.47) a (3.48).

Funkci (3.42) tedy můžeme vyjádřit pomocí Fourierovy řady takto:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= Kx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x) = a_1 \varphi_1(x) + a_2 \varphi_2(x) + a_3 \varphi_3(x) + \dots = \\
 &= \frac{2Kl}{\pi} \sin(\pi x/l) - \frac{2Kl}{2\pi} \sin(2\pi x/l) + \frac{2Kl}{3\pi} \sin(3\pi x/l) - \dots \quad (3.49)
 \end{aligned}$$

Na obr. 3.12 je ukázáno, jak se postupně přičítají první 4 členy této řady. Je zřejmé, že přidáním dalších členů se bude konečná řada stále více blížit lineární funkci  $f(x) = Kx$ , až s ní celá nekonečná řada (3.49) splyne.

Protože funkce  $f(x) = Kx$  nabývá nuly, když  $x = 0$ , i libovolný konečný součet členů Fourierovy řady (3.49) jí v tomto bodě odpovídá zcela přesně. Avšak v bodě  $x = l$  se funkce  $f(x)$  od Fourierovy řady liší, neboť všechny zvolené báze funkce  $\varphi_n(x) = \sin(n\pi x/l)$  nabývají nuly, když  $x = l$ . Toto je ukázáno na obr. 3.13 vlevo. Můžeme tedy říci, že ve srovnání s předchozím příkladem nyní Fourierova řada konverguje rychle i v blízkosti levého krajního



Obrázek 3.12: Grafy součtů prvních členů Fourierovy řady (3.49) (silné černé křivky). Vlevo nahoře: první člen  $a_1\varphi_1(x)$ , vpravo nahoře:  $a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x)$ , vlevo dole:  $a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) + a_3\varphi_3(x)$  a vpravo dole:  $a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) + a_3\varphi_3(x) + a_4\varphi_4(x)$ .

bodů  $x = 0$  narozdíl od okolí pravého krajního bodu  $x = l$ , kde konverguje pomalu. Přímou v bodě  $x = l$  opět nekonverguje vůbec.

Graf Fourierovy řady (3.49) mimo interval  $x \in \langle 0, l \rangle$  je ukázán na obr. 3.13 vpravo. Průběh je opět periodický s periodou  $2l$  a na intervalu  $x \in \langle 0, 2l \rangle$  je antisymetrický vzhledem k  $x = l$ .

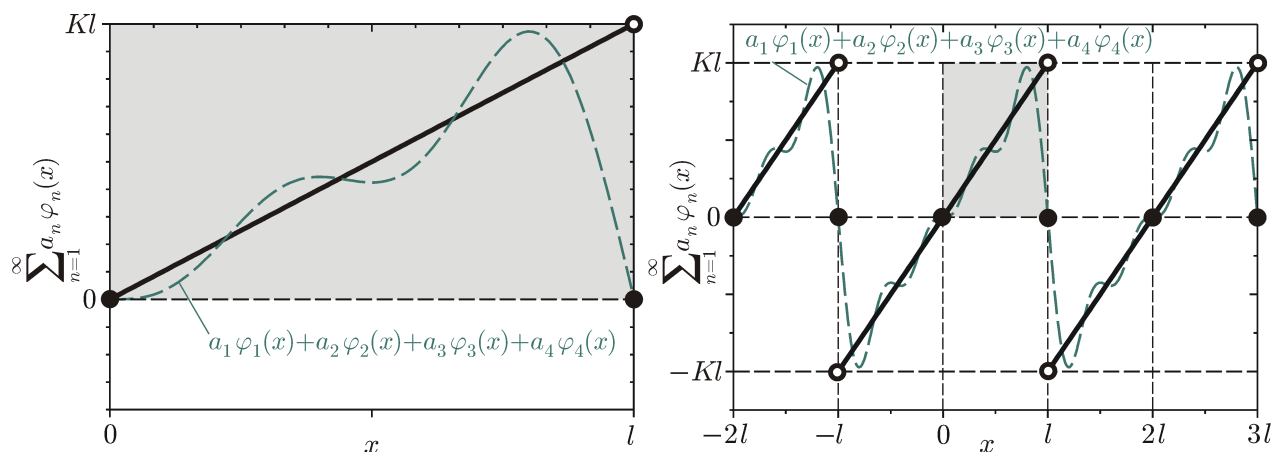
## A.8 Kosinová řada

Zaměříme se nyní na Fourierovu řadu (3.35) s kosinovými bázovými funkcemi

$$\varphi_n(x) = \cos(n\pi x/l) \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots). \quad (3.50)$$

Je zřejmé, že pro  $n = 0$  speciálně platí:  $\varphi_0(x) = 1$ . Ukážeme, že i tyto bázové funkce tvoří ortogonální systém na intervalu  $x \in \langle 0, l \rangle$ , kde  $l > 0$ . Podmínka ortogonality (3.38) stanovuje, že skalární součin  $\langle \varphi_n | \varphi_m \rangle$  pro  $m \neq n$  je roven nule. Nejprve

$$\langle \varphi_0 | \varphi_m \rangle = \int_0^l \cos(m\pi x/l) dx = \frac{\sin(m\pi x/l)}{m\pi/l} \Big|_0^l = 0 \quad (m = 1, 2, 3, \dots)$$



Obrázek 3.13: Vlevo: Vztah (3.49) platí pouze na intervalu  $x \in \langle 0, l \rangle$ , neboť  $\varphi_n(0) = \varphi_n(l) = 0$  pro všechna  $n$ . Vpravo: Graf Fourierovy řady (3.49) mimo interval  $x \in \langle 0, l \rangle$  znázorněný šedými obdélníky v obou obrázcích.

a dále

$$\begin{aligned} \langle \varphi_n | \varphi_m \rangle &= \int_0^l \cos(n\pi x/l) \cos(m\pi x/l) dx = \\ &= \frac{\sin[(n-m)\pi x/l]}{2(n-m)\pi/l} + \frac{\sin[(n+m)\pi x/l]}{2(n+m)\pi/l} \Big|_0^l = 0 \quad (n, m = 1, 2, 3, \dots). \end{aligned}$$

Pro  $m = n$  zase platí:

$$\langle \varphi_0 | \varphi_0 \rangle = \int_0^l dx = l = c_0 \quad (3.51)$$

a

$$\langle \varphi_n | \varphi_n \rangle = \int_0^l \cos^2(n\pi x/l) dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2n\pi x/l)}{4n\pi/l} \Big|_0^l = \frac{l}{2} = c_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (3.52)$$

Čísla  $c_0 = l$  a  $c_1 = c_2 = \dots = l/2$  jsou opět konečná a nenulová. Můžeme tedy říci, že systém bázových funkcí (3.56) je zase ortogonální.

### Příklad vyjádření exponenciální funkce kosinovou řadou

Pomocí Fourierovy řady (3.35) s kosinovými bázovými funkcemi (3.56) chceme vyjádřit exponenciální funkci

$$f(x) = f_0 \exp(-2x/l) \quad (3.53)$$

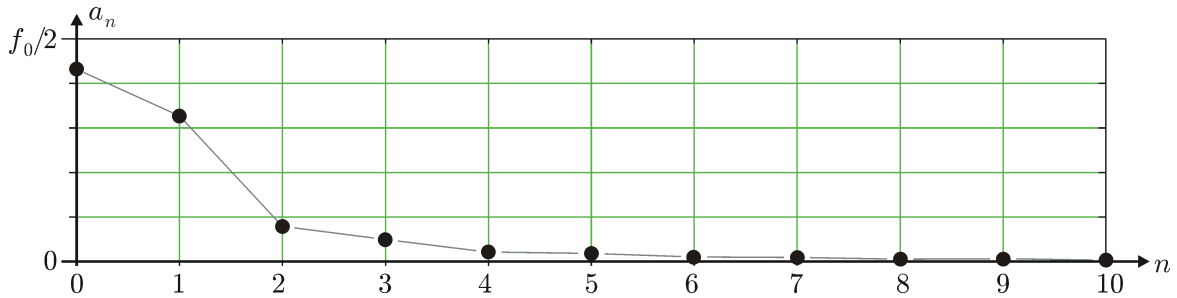
na intervalu  $x \in \langle 0, l \rangle$ . Amplituda  $a_0$  Fourierovy řady vyjde podle vztahu (3.39) následovně:

$$a_0 = \frac{1}{c_0} \int_{x_0}^{x_1} \varphi_0^*(x) f(x) dx = \frac{1}{l} \int_0^l f_0 \exp(-2x/l) dx = -\frac{f_0 \exp(-2x/l)}{l \cdot 2/l} \Big|_0^l = \frac{f_0(1 - e^{-2})}{2}. \quad (3.54)$$

Zbylé amplitudy  $a_n$  potom nalezneme takto:

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{c_n} \int_{x_0}^{x_1} \varphi_n^*(x) f(x) dx = \frac{2}{l} \int_0^l \cos(n\pi x/l) f_0 \exp(-2x/l) dx = \\
 &= \frac{2f_0}{l} \exp(-2x/l) \frac{(n\pi/l) \sin(n\pi x/l) - (2/l) \cos(n\pi x/l)}{(n\pi/l)^2 + (2/l)^2} \Big|_0^l = \\
 &= \frac{4f_0 [1 - (-1)^n e^{-2}]}{(n\pi)^2 + 4} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).
 \end{aligned} \tag{3.55}$$

Obr. 3.14 ukazuje hodnoty prvních 11 amplitud  $a_n$ , jež se s rostoucím  $n$  limitně blíží nule, a tudíž Fourierova řada konverguje.



Obrázek 3.14: Hodnoty prvních 10 amplitud  $a_n$  podle (3.54) a (3.55).

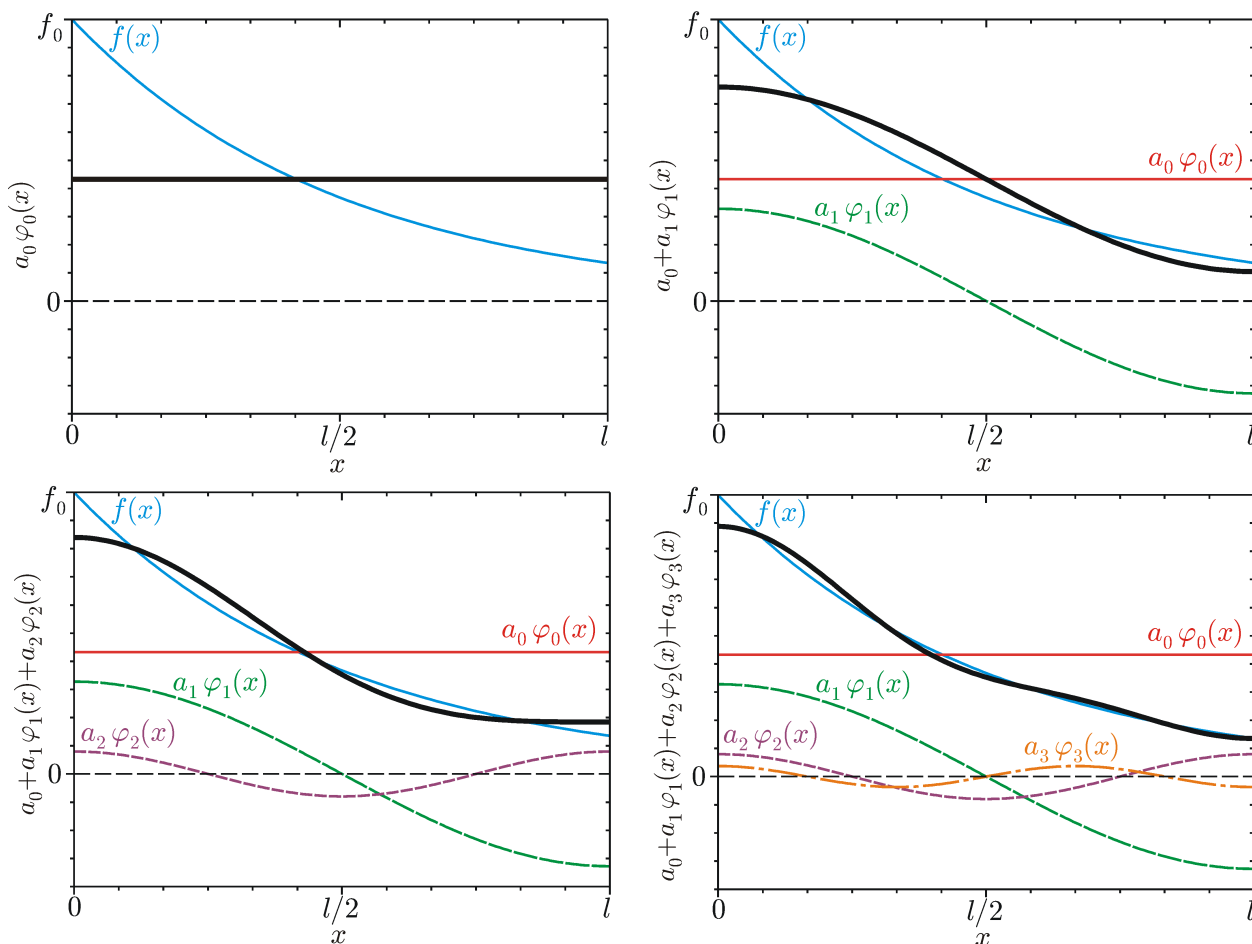
Funkci (3.53) nakonec vyjádříme pomocí Fourierovy řady (3.35) s kosinovými bázovými funkcemi (3.56) následujícím způsobem:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= f_0 \exp(-2x/l) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x) = a_0 + a_1 \varphi_1(x) + a_2 \varphi_2(x) + a_3 \varphi_3(x) + \dots = \\
 &= \frac{f_0 (1 - e^{-2})}{2} + \frac{4f_0 (1 + e^{-2})}{\pi^2 + 4} \cos(\pi x/l) + \frac{4f_0 (1 - e^{-2})}{4\pi^2 + 4} \cos(2\pi x/l) + \\
 &+ \frac{4f_0 (1 + e^{-2})}{9\pi^2 + 4} \cos(3\pi x/l) + \dots
 \end{aligned} \tag{3.56}$$

Na obr. 3.15 je zobrazeno postupné přičítání prvních 4 členů Fourierovy řady (3.56). Přičtením dalších členů se bude konečná řada stále více blížit exponenciální funkci  $f(x) = f_0 \exp(-2x/l)$ . Celá nekonečná řada (3.56) potom bude přímo rovna vyjádřené funkci.

Nyní bázové funkce  $\varphi_n(x) = \cos(n\pi x/l)$  způsobují, že Fourierova řada konverguje rychle ve všech bodech intervalu  $x \in \langle 0, l \rangle$ . Vidíme, že již první čtyři členy vystihují funkci  $f(x)$  „velmi dobře“. Toto se děje dokonce i včetně okolí krajních bodů  $x = 0$  a  $x = l$  na rozdíl od sinové řady, viz str. 241. Avšak teď pro změnu musíme mít na paměti, že vzhledem k nulové derivaci kosinových bázových funkcí v krajních bodech i výsledná Fourierova řada bude mít v těchto bodech nulové derivace a nebude zde tudíž rovna derivaci funkce (3.53).

Jaký má nyní Fourierova řada průběh mimo interval  $x \in \langle 0, l \rangle$ ? Bázové funkce  $\cos(n\pi x/l)$  nám naznačují, že bude opět periodická s periodou  $2l$ , ale nyní její graf bude na intervalu  $x \in \langle 0, 2l \rangle$  symetrický vzhledem k  $x = l$ . Graf Fourierovy řady (3.56) mimo interval  $x \in \langle 0, l \rangle$  je ukázán na obr. 3.16 vpravo.



Obrázek 3.15: Grafy součtů prvních nenulových členů Fourierovy řady (3.56) (silné černé křivky). Vlevo nahoře: první člen  $a_0\varphi_0(x)$ , vpravo nahoře:  $a_0 + a_1\varphi_1(x)$ , vlevo dole:  $a_0 + a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x)$  a vpravo dole:  $a_0 + a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) + a_3\varphi_3(x)$ .

## A.9 Kosino-sinová řada

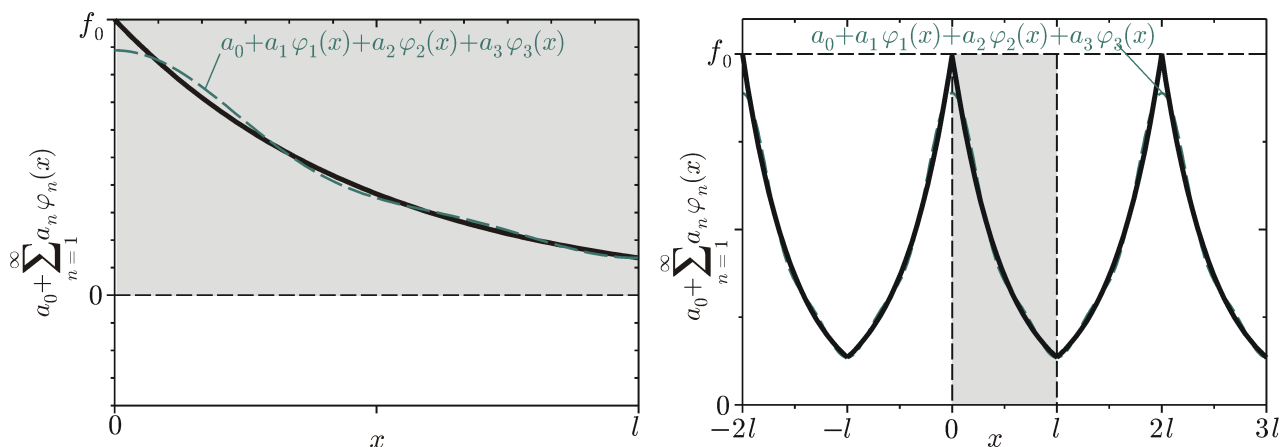
Z předchozího textu plyne, že rozšířením definičního oboru Fourierových řad mimo interval  $x \in \langle 0, l \rangle$  můžeme značně navýšit jejich využití. Stejný soubor amplitud totiž platí jak pro funkce definované v původním intervalu, tak i pro periodické funkce definované mimo daný interval ale mající ještě další vlastnosti. Těmito vlastnostmi jsou především to, že jsou vzhledem ke středu intervalu  $x \in \langle 0, 2l \rangle$  buď antisymetrické (sinová řada, viz obr. 3.10 a obr. 3.13 vpravo), anebo symetrické (kosinová řada, viz obr. 3.16 vpravo). Jinými slovy řečeno: pomocí uvedených řad můžeme vyjádřit nejen samotné funkce  $f(x)$  na uvedeném intervalu, ale i jejich antisymetrická či symetrická periodická rozšíření.

Nyní se zaměříme na řadu, pomocí níž můžeme vyjádřit libovolnou funkci  $f(x)$  periodickou na intervalu  $x \in \langle 0, l \rangle$  bez dalších požadavků. Pro tento účel bychom mohli využít popsané sinové i kosinové řady. Vlastnost periodicity na uvedeném intervalu však stanovuje, že se v argumentu obou goniometrických funkcí objeví navíc faktor 2, proto jednotlivé báze funkce předpokládáme ve tvaru:

$$\varphi_{1,n}(x) = \cos(2n\pi x/l), \quad \varphi_{2,n}(x) = \sin(2n\pi x/l) \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots), \quad (3.57)$$

kde speciálně  $\varphi_{1,0}(x) = 1$  a  $\varphi_{2,0}(x) = 0$  (tuto funkci již budeme nadále vynechávat). Funkci





Obrázek 3.16: Vlevo: Vztah (3.56) platí na celém intervalu  $x \in \langle 0, l \rangle$  včetně jeho krajních bodů  $x = 0$  a  $x = l$ . Vpravo: Graf Fourierovy řady (3.56) mimo interval  $x \in \langle 0, l \rangle$  znázorněný šedými obdélníky v obou obrázcích.

$f(x)$  tedy budeme vyjadřovat pomocí Fourierovy řady (3.35)

$$f(x) = a_{1,0} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_{1,n} \cos(2n\pi x/l) + a_{2,n} \sin(2n\pi x/l)], \quad (3.58)$$

kde  $a_{1,n}$  a  $a_{2,n}$  jsou amplitudy. Nyní se přesvědčíme, že báze funkce (3.69) tvoří ortogonální systém podle podmínek (3.38). Nejprve  $m \neq n$ :

$$\begin{aligned} \langle \varphi_{1,0} | \varphi_{1,m} \rangle &= \int_0^l \cos(2m\pi x/l) dx = \frac{\sin(2m\pi x/l)}{2m\pi/l} \Big|_0^l = 0 \quad (m = 1, 2, 3, \dots), \\ \langle \varphi_{1,0} | \varphi_{2,m} \rangle &= \int_0^l \sin(2m\pi x/l) dx = -\frac{\cos(2m\pi x/l)}{2m\pi/l} \Big|_0^l = 0 \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

a dále

$$\begin{aligned} \langle \varphi_{1,n} | \varphi_{1,m} \rangle &= \int_0^l \cos(2n\pi x/l) \cos(2m\pi x/l) dx = \\ &= \frac{\sin[2(n-m)\pi x/l]}{4(n-m)\pi/l} + \frac{\sin[2(n+m)\pi x/l]}{4(n+m)\pi/l} \Big|_0^l = 0 \quad (n, m = 1, 2, 3, \dots), \\ \langle \varphi_{2,n} | \varphi_{2,m} \rangle &= \int_0^l \sin(2n\pi x/l) \sin(2m\pi x/l) dx = \\ &= \frac{\sin[2(n-m)\pi x/l]}{4(n-m)\pi/l} - \frac{\sin[2(n+m)\pi x/l]}{4(n+m)\pi/l} \Big|_0^l = 0 \quad (n, m = 1, 2, 3, \dots), \\ \langle \varphi_{1,n} | \varphi_{2,m} \rangle &= \int_0^l \cos(2n\pi x/l) \sin(2m\pi x/l) dx = \\ &= \frac{\cos[2(n-m)\pi x/l]}{4(n-m)\pi/l} - \frac{\cos[2(n+m)\pi x/l]}{4(n+m)\pi/l} \Big|_0^l = 0 \quad (n, m = 1, 2, 3, \dots). \end{aligned}$$

Pro  $m = n$  naopak platí:

$$\langle \varphi_{1,0} | \varphi_{1,0} \rangle = \int_0^l dx = l = c_{1,0} \quad (3.59)$$

a

$$\langle \varphi_{1,n} | \varphi_{1,n} \rangle = \int_0^l \cos^2(2n\pi x/l) dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin(4n\pi x/l)}{8n\pi/l} \Big|_0^l = \frac{l}{2} = c_{1,n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (3.60)$$

$$\langle \varphi_{2,n} | \varphi_{2,n} \rangle = \int_0^l \sin^2(2n\pi x/l) dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(4n\pi x/l)}{8n\pi/l} \Big|_0^l = \frac{l}{2} = c_{2,n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (3.61)$$

Čísla  $c_{0,1} = l$  a  $c_{1,1} = c_{1,2} = \dots = c_{2,1} = c_{2,2} = \dots = l/2$  jsou konečná a nenulová a systém bázových funkcí (3.69) je tudíž opět ortogonální. Pro amplitudu  $a_{1,0}$  v (3.58) tedy podle vztahu (3.39) platí

$$a_{1,0} = \frac{1}{c_0} \int_{x_0}^{x_1} \varphi_{1,0}^*(x) f(x) dx = \frac{1}{l} \int_0^l f(x) dx \quad (3.62)$$

a dále pro ostatní amplitudy  $a_{1,n}$  a  $a_{2,n}$

$$a_{1,n} = \frac{1}{c_{1,n}} \int_{x_0}^{x_1} \varphi_{1,n}^*(x) f(x) dx = \frac{2}{l} \int_0^l \cos(2n\pi x/l) f(x) dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (3.63)$$

$$a_{2,n} = \frac{1}{c_{2,n}} \int_{x_0}^{x_1} \varphi_{2,n}^*(x) f(x) dx = \frac{2}{l} \int_0^l \sin(2n\pi x/l) f(x) dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (3.64)$$

### Příklad vyjádření kvadratické funkce kosino-sinovou řadou

Pomocí Fourierovy řady (3.58) s kosinovými a sinovými bázovými funkcemi (3.69) vyjádříme na intervalu  $x \in \langle 0, l \rangle$  kvadratickou funkci

$$f(x) = Cx^2, \quad (3.65)$$

kde  $C$  je konstanta. Amplituda  $a_{1,0}$  bude podle vztahu (3.62) následující:

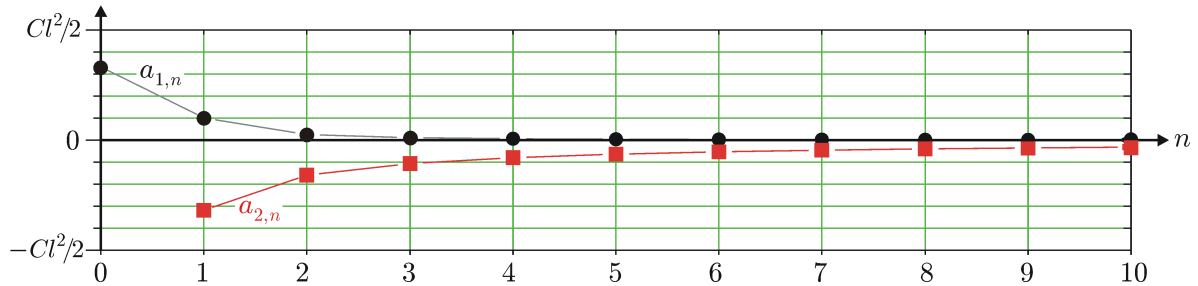
$$a_{1,0} = \frac{1}{l} \int_0^l Cx^2 dx = \frac{Cx^3}{l \cdot 3} \Big|_0^l = \frac{Cl^2}{3}. \quad (3.66)$$

Užitím (3.63) a (3.64) ostatní amplitudy  $a_{1,n}$  a  $a_{2,n}$  vyjdou takto:

$$\begin{aligned} a_{1,n} &= \frac{2}{l} \int_0^l \cos(2n\pi x/l) Cx^2 dx = \\ &= \frac{2C}{l} \left[ \frac{(2n\pi/l)^2 x^2 - 2}{(2n\pi/l)^3} \sin(2n\pi x/l) + 2(2n\pi/l)x \cos(2n\pi x/l) \right] \Big|_0^l = \\ &= \frac{Cl^2}{(n\pi)^2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \quad (3.67)$$

a

$$\begin{aligned} a_{2,n} &= \frac{2}{l} \int_0^l \sin(2n\pi x/l) Cx^2 dx = \\ &= \frac{2C}{l} \left[ \frac{2 - (2n\pi/l)^2 x^2}{(2n\pi/l)^3} \cos(2n\pi x/l) + 2(2n\pi/l)x \sin(2n\pi x/l) \right] \Big|_0^l = \\ &= -\frac{Cl^2}{n\pi} \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \end{aligned} \quad (3.68)$$



Obrázek 3.17: Hodnoty prvních 21 amplitud  $a_{1,n}$  (černé kruhy) a  $a_{2,n}$  (červené čtverce) podle (3.66), (3.67) a (3.68).

Obr. 3.17 ukazuje hodnoty prvních 21 amplitud  $a_{1,n}$  a  $a_{2,n}$ . Jejich limita je při  $n \rightarrow \infty$  rovna nule, avšak  $a_{2,n}$  se blíží k nule pomaleji než  $a_{1,n}$ . Zhruba od  $n = 3$  budou ve Fourierově řadě již převládat pouze sinové bázové funkce  $\varphi_{2,n}(x) = \sin(2n\pi x/l)$ , zatímco kosinové bázové funkce  $\varphi_{1,n}(x) = \cos(2n\pi x/l)$  budou zanedbatelné.

Funkce (3.65) nakonec bude vyjádřena pomocí Fourierovy řady se sinovými a kosinovými bázovými funkcemi následujícím způsobem:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= Cx^2 = a_{1,0} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_{1,n}\varphi_{1,n}(x) + a_{2,n}\varphi_{2,n}(x)] = a_{1,0} + a_{1,1}\varphi_{1,1}(x) + \\
 &+ a_{2,1}\varphi_{2,1}(x) + a_{1,2}\varphi_{1,2}(x) + a_{2,2}\varphi_{2,2}(x) + a_{1,3}\varphi_{1,3}(x) + a_{2,3}\varphi_{2,3}(x) \cdots = \\
 &= \frac{Cl^2}{3} + \frac{Cl^2}{\pi^2} \cos(2\pi x/l) - \frac{Cl^2}{\pi} \sin(2\pi x/l) + \frac{Cl^2}{4\pi^2} \cos(4\pi x/l) - \\
 &- \frac{Cl^2}{2\pi} \sin(4\pi x/l) + \frac{Cl^2}{9\pi^2} \cos(6\pi x/l) - \frac{Cl^2}{3\pi} \sin(6\pi x/l) + \dots \quad (3.69)
 \end{aligned}$$

Na obr. 3.19 je zobrazeno postupné přičítání 6 členů Fourierovy řady (3.69). Konečná řada se bude přičtením dalších členů stále více blížit kvadratické funkci  $f(x) = Cx^2$ . Celá nekonečná řada (3.69) potom bude, až na krajní body  $x = 0$  a  $x = l$ , přímo rovna dané funkci, jak ukazuje obr. 3.18 vlevo.

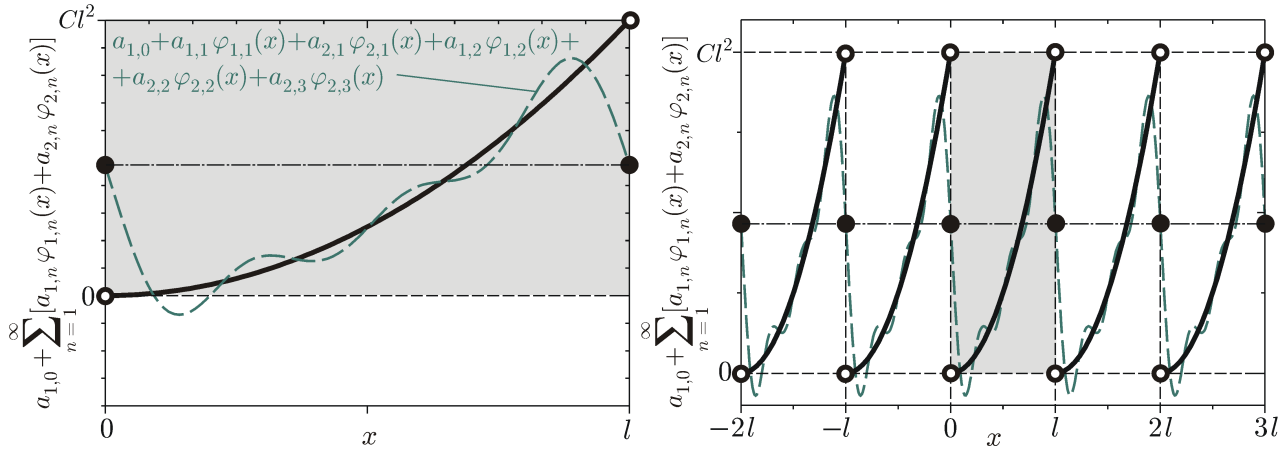
Amplitudy  $a_{1,n}$  u kosinových bázových funkcí  $\varphi_{1,n}(x) = \cos(2n\pi x/l)$  konvergují k nule rychleji než amplitudy  $a_{2,n}$  u sinových bázových funkcí  $\varphi_{2,n}(x) = \sin(2n\pi x/l)$ . Na obr. 3.19 vpravo dole vidíme, že již „kosinový“ člen  $a_{1,2}\varphi_{1,2}(x)$  podstatně méně přispívá do výsledné Fourierovy řady než „sinový“ člen  $a_{2,2}\varphi_{2,2}(x)$ . Člen  $a_{1,3}\varphi_{1,3}(x)$  jsme v posledním obrázku vpravo dole vynechali.

Jak jsme požadovali, Fourierova řada se sinovými a kosinovými bázovými funkcemi je mimo interval  $x \in \langle 0, l \rangle$  periodickou funkcí, jak je ukázáno na obr. 3.18 vpravo.

## A.10 Exponenciální řada

Kosino-sinovou řadou se můžeme inspirovat při hledání báze, která by vytvořila Fourierovu řadu pro vyjádření komplexních funkcí. Namísto amplitud  $a_{1,0}$  spolu s  $a_{1,n}$  a  $a_{2,n}$  obecně různých pro každé  $n = 1, 2, \dots$  zavedeme nové obecně komplexní amplitudy  $a_0$ ,  $a_n$  a  $a_{-n}$  pro každé  $n$ . Pro ně platí, že  $a_{1,0} = a_0$  a dále  $a_{1,n} = a_n + a_{-n}$  a  $a_{2,n} = i(a_n - a_{-n})$  pro všechna  $n$ . Přecházíme tedy od starého souboru amplitud k novému, „stejně velkému“.<sup>7</sup> Ukážeme, že

<sup>7</sup>Zároveň si všimáme toho, že, pokud by byla funkce  $f(x)$  reálná, byly by i původní amplitudy  $a_{1,n}$  a  $a_{2,n}$  reálné, a proto by muselo platit  $a_n = a_{-n}^*$ , tzn. nové amplitudy  $a_n$  a  $a_{-n}$  by byly pro všechna  $n$ , vyjma  $a_0$ , navzájem komplexně sdružené.



Obrázek 3.18: Vlevo: Vztah (3.69) platí na celém intervalu  $x \in \langle 0, l \rangle$  vyjma jeho krajních bodů  $x = 0$  a  $x = l$ . Vpravo: Graf Fourierovy řady (3.56) mimo interval  $x \in \langle 0, l \rangle$  znázorněný šedými obdélníky v obou obrázcích.

takto vzniklé báze funkce

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= 1, \\ \varphi_{\pm n}(x) &= \exp(\pm 2in\pi x/l) \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \end{aligned} \quad (3.70)$$

tvoří ortogonální systém na intervalu  $x \in \langle -l/2; l/2 \rangle$ . Uvědomujeme si přitom, že v důsledku toho, že báze funkce (3.70) jsou komplexní, nyní platí  $\varphi_{\pm n}^*(x) = \exp(\mp 2in\pi x/l) = \varphi_{\mp n}(x)$ . Jako obvykle začneme s  $m \neq n$ , přičemž můžeme do následujících výpočtů zahrnout i báze funkce s  $n = 0$ , neboť  $\varphi_0(x) = 1 = \exp(0)$ :

$$\begin{aligned} \langle \varphi_{\pm n} | \varphi_{\pm m} \rangle &= \int_{-l/2}^{l/2} \exp(\mp 2in\pi x/l) \exp(\pm 2im\pi x/l) dx = \int_{-l/2}^{l/2} \exp[\pm 2i(m-n)\pi x/l] dx = \\ &= \frac{\exp[\pm 2i(m-n)\pi x/l]}{\pm 2i(m-n)\pi/l} \Big|_{-l/2}^{l/2} = 0 \quad (n, m = 0, 1, 2, 3, \dots). \end{aligned}$$

Pro  $m = n$  potom platí:

$$\begin{aligned} \langle \varphi_{\pm n} | \varphi_{\pm n} \rangle &= \int_{-l/2}^{l/2} \exp(\mp 2in\pi x/l) \exp(\pm 2in\pi x/l) dx = \\ &= \int_{-l/2}^{l/2} dx = l = c_{\pm n} \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots). \end{aligned} \quad (3.71)$$

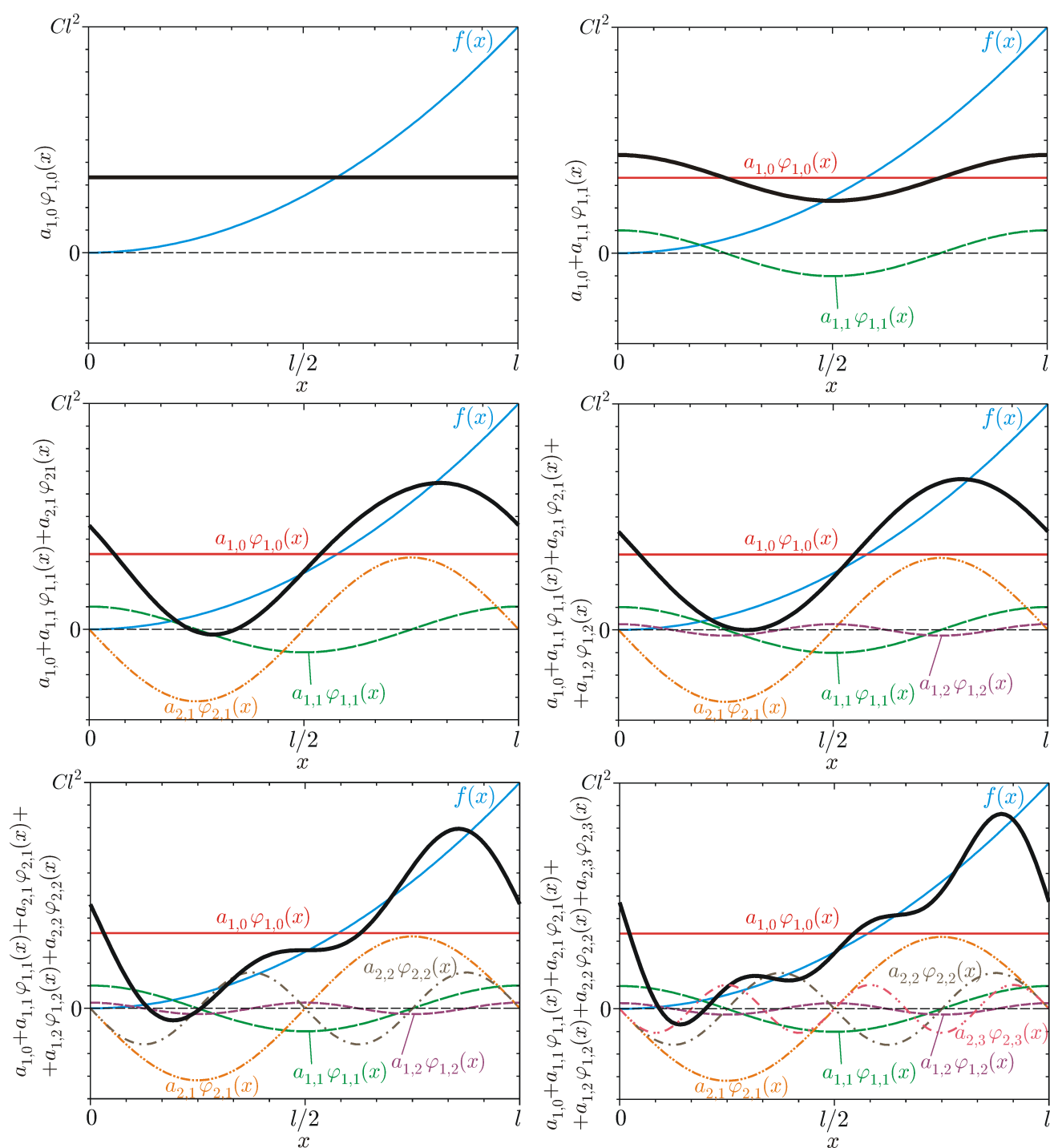
Čísla  $c_0 = c_{\pm 1} = c_{\pm 2} = c_{\pm 3} = \dots = l$  jsou konečná a nenulová, a proto systém báze funkcí (3.70) je ortogonální.

Libovolnou komplexní funkci  $f(x)$  reálné proměnné  $x$  tedy lze na intervalu  $x \in \langle -l/2; l/2 \rangle$  vyjádřit pomocí Fourierovy řady (3.35)

$$f(x) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} a_s \exp(2is\pi x/l), \quad (3.72)$$

kde  $a_s$  jsou obecně komplexní amplitudy, které získáme pomocí vztahů (3.39), jež mají nyní tvar

$$a_s = \frac{\langle \varphi_s | f \rangle}{c_s} = \frac{1}{l} \int_{-l/2}^{l/2} f(x) \exp(-2is\pi x/l) dx \quad (s = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots). \quad (3.73)$$



Obrázek 3.19: Grafy součtů 6 členů Fourierovy řady (3.69) (silné černé křivky).